

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2025.02.XX

Adfīnitās 与 Aurōra：使用光线矢量追踪仿真多行星系统光变曲线

金洛曦^{1,2}, 葛健¹

(1. 中国科学院上海天文台, 上海 200030; 2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要:

随着凌星法成为系外行星探测中最为高效的手段之一, 如何更精确地模拟多行星系统中复杂的轨道扰动及其在光变曲线中的体现, 成为当前研究的关键问题之一。本文提出一种从动力学仿真到凌星光变曲线生成的端到端方法, 融合了高精度的多体引力动力学模拟与光线矢量追踪算法, 能够精确描述多行星系统中多个天体同时遮掩恒星时的光度变化。本方法采用速度表示的韦尔莱积分器等辛积分器保证长时间积分下哈密顿量的守恒, 并通过空间几何中的光线追踪技术实现对复杂几何结构下光变曲线的模拟。该方法被实现为开源的 **Julia** 软件包^①, 具备良好的并行与分布式计算支持。本方法可以模拟真实的多体凌星现象, 为缺乏观测数据的研究领域, 如系外月球探索等, 提供了仿真数据支持。实验结果表明, 本方法在时间尺度、模拟精度与可扩展性方面具备优势, 可为凌星法中非周期扰动信号的识别、TTV 和 TDV 等次级效应的模拟与算法测试提供重要工具支持。

关键词: 系外行星, 系外月球, 凌星法, 数值模拟

中图分类号: P145.2 **文献标识码:** A

1 绪 论

自 1992 年第一颗绕着脉冲星的系外行星的发现和确认^[1]以来, 人类开始认识到系外行星系统的存在。而随着 1995 年 10 月 06 日第一颗围绕类太阳恒星运行的行星被发现^[2], 人类意识到类太阳恒星周围也存在着行星。因此, 和人类赖以生存的家园地球相似的宜居类

收稿日期: 2025-05-07; 修回日期: 2025-08-24

资助项目: 太空探源专项

通讯作者: 葛健, jge@shao.ac.cn

^①可联系作者获取: umaru@umaru.science

地行星也有可能存在。甚至和人类相似的高度文明也有可能存在。此后，系外行星的探索成为了回答“我们是否孤独？”甚至是“我们从何而来？”这一终极问题的自然研究路径。根据 NASA 系外行星档案^[3]的信息，截止到 2025 年 08 月 11 日，已经有 5972 颗系外行星被确认。其中有 4466 颗行星发生了凌星，约占总数的 74.8%。由此可见，凌星法是目前发现系外行星最高效的方法。

当行星从一颗恒星前穿过时会部分遮挡恒星发出的光，这使得观测者可以通过光度计探测恒星的光度变化并绘制凌星期间的光变曲线。通过对光变曲线变化周期的分析，研究人员可以判断被测恒星周围是否有潜在的行星围绕以及这颗潜在行星的轨道周期 T 。当系外行星的半径为 r 时，其作为前景目标会遮挡恒星上对应面积约为 πr^2 的光。若该行星宿主恒星半径 R 已知，则光变曲线减少的量占恒星全部光强的比值为 $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$ 。这样就可以根据光度减少的相对幅度计算出这颗行星的半径与其宿主恒星半径的比值。除此之外，若已知宿主恒星质量 M ，则可以根据光变曲线变化的周期 P 计算出行星的轨道半长径 $a = \sqrt[3]{GM \left(\frac{P}{2\pi}\right)^2}$ 。根据这一原理，有学者提出了盒式最小二乘法（BLS, Box Least Squares）^[4]用于从光变曲线中检出系外行星的凌星信号，这一方法被广泛用于大量光变曲线的自动化筛查。若在凌星事件发生时对恒星发出的光进行光谱分析，还可以得到凌星行星的透射光谱等信息。这为研究行星大气成分提供了简洁高效的途径。

受行星和恒星形状以及临边昏暗效应（Limb Darkening）的影响，光变曲线的减少部分并不是理想的矩形或梯形。已经有学者对受临边昏暗效应影响的单个行星的凌星光变曲线进行了建模^[5,6]，也有利用这些模型生成光变曲线的工具 BATMAN^[7]等，这些工作被用于敏感度更高的凌星检测算法，如凌星最小二乘法（TLS, Transit Least Squares）^[8]等。这些模型和工具都面向单行星的凌星过程，不能描述多行星系统（或包含卫星的系统）中多个天体同时凌星时的光度变化，也不能模拟多行星系统中的引力相互作用。

在探索系外月球方面，由于缺乏足够的观测数据^[9,10]，且传统的积分计算方法难以推广到多体遮掩模型中，所以相关研究需要一种能够描述这一物理过程的计算模型来提供模拟仿真数据。虽然已经有学者提出了一些系外月球光变曲线仿真方法，如 LUNA^[11]和 Pandora^[12]，但仍然存在一些不足。LUNA 方法直接将卫星凌星信号注入光变曲线，这种方法虽然计算速度很快，但无法准确还原多体遮掩的光变曲线细节。Pandora 方法解决了相互遮掩问题，但其基于简化的恒星-行星-卫星三体运动模型。这一模型使得 Pandora 存在不能有效处理多卫星或多行星同时凌星以及不能仿真光变曲线的进入和离开阶段等问题。

在动力学研究方面，早在 19 世纪就已经有学者根据牛顿的万有引力定律^[13]通过对天王星轨道的微小变化分析预测了海王星的存在^[14]。这为通过多行星系统中行星间引力扰动来探测其他行星开创了先河。即便凌星法是目前为止最高效的搜寻系外行星的方法，受凌星方法物理背景所限，我们依然只能通过光变曲线反推出轨道穿过观测者与其恒星连线上的天体。这意味着更多的行星并不会在光变曲线上留下明显的径迹。自 Kepler 卫星发射以来，我们已经获得了大量的光变曲线观测数据，如果仅检出其中凌星的情况，这些数据的潜在价值将没有被充分利用。目前基于与牛顿引力定律同样的原理，人们发展出了许多根据光变曲线中调制的引力扰动来探测凌星行星外的系外行星的方法。如凌星时刻变化方法（TTV,

Transit Timing Variations)^[15-17] 和凌星持续时间变化方法 (TDV, Transit Duration Variations)^[18-20] 等。

由于多天体凌星以及多天体引力相互作用产生的凌星光变曲线变化的观测数据有限, 需要有效的模拟这些物理过程的光变曲线的方法来帮助我们认识这些物理过程产生的观测信号的特征和变化规律, 从而可以有效地在已有光变曲线和未来凌星观测 (如 PLATO^[21, 22] 和 ET^[23-27] 等) 中获得的光变曲线中识别和确认这些物理过程产生的观测信号。

光线追踪方法通过跟踪计算自光源发出的每一条光线到被观测者接收的过程, 来精确描述光线的传播。这一方法可以精确建模复杂几何环境下光线的传播过程, 被广泛应用于计算机图形学领域^[28, 29]。目前该方法在天文学领域也有使用的实例, 如对黑洞吸积盘的光变曲线模拟^[30]、微引力透镜光变曲线的快速模拟^[31]及广义相对论背景下的辐射传输仿真^[32]等。

本文提出了一种从动力学仿真到凌星光变曲线生成的端到端算法, 首次在描述多天体间轨道扰动的同时利用光线矢量追踪的方法精确积分多行星凌星的光变曲线。我们在计算中模拟自恒星发出的多条光线矢量穿过空间, 根据路径判断是否被行星、月球或其他物体吸收或遮挡, 可处理复杂几何及多体重叠等情况, 为现有光变反演算法提供了更真实的测试平台。

本方法由动力学仿真和光线矢量追踪两部分组成。其中动力学仿真程序被命名为 Adfinitās 来自拉丁语中的“吸引”与“亲缘”, 仿真光变曲线的部分被命名为 Aurōra 来自拉丁语中的“曙光”与“黎明”。

我们将释放一份本方法的 Julia 源代码, 其中包含为并行和分布式计算而准备的代码, 我们将在后面的内容中详细说明。

2 本方法的适用情况

本方法分为两个部分: 多体运动的动力学模拟和基于矢量追踪的光变曲线生成。

动力学部分被设计用于多行星系统的仿真, 适用于下面的情况:

1. 在不修改相互作用子函数代码的前提下, 适用于只存在引力相互作用的多体运动;
2. 相互作用的传递时间可以忽略不计, 即运动中的相互作用可以被视为超距作用;
3. 运动的物体间不发生碰撞;
4. 运动的物体可以被简化为不可分割和合并的质点;
5. 运动的时间尺度有一定的限制, 以确保计算机中浮点数计算的误差是可以接受的。

光变曲线生成的部分仅能适用于下面的情况:

1. 多个物体相对于观测者而言只遮掩同一个恒星;
2. 恒星表面的亮度分布是中心对称的, 即亮度分布仅在径向上存在变化;
3. 计算机的随机存储器足够大以支撑使用者设置的分辨率要求。

3 原理阐述

图 1 展示了本方法的程序结构，程序根据该图以自上而下的顺序执行。其中的凌星配置部分可以与天体初始状态配置同时完成，也可以在动力学仿真结束后设置，图示显示的是程序读取该配置项的位置。图中的光线矢量追踪器作为本文的核心内容，将在本章中被详细介绍。



图 1 本方法的程序结构示意图。其中，程序配置、凌星配置和动力学积分器等三个部分可以由用户配置和指定。

3.1 动力学部分简介

本文使用对加速度进行逐次积分的方法计算每个质点的运动轨迹。因为这一方法在动力学仿真中被普遍采用，所以我们仅简单描述我们所采用的积分器。

为了保持无碰撞引力相互作用中的辛几何结构^[33]在仿真过程中尽可能不改变，同时在仿真的精度和速度之间取得平衡，我们选取了式 1 中的半隐式欧拉积分器^[34]（一阶隐式龙格-库塔积分器）和式 2 速度表示的韦尔莱积分器^[35]两种积分器作为内置积分器。积分器部

分被单独封装, 读者可以根据需要编写其他积分器, 如蛙跳积分器^[36]和四阶龙格-库塔积分器^[37]等。本文使用速度表示的韦尔莱积分器为例进行测试。

$$\begin{cases} \vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \vec{a}_n \Delta t \\ \vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \vec{v}_{n+1} \Delta t \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \vec{v}_n \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}_n \Delta t^2 \\ \vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \frac{\vec{a}_n + \vec{a}_{n+1}}{2} \Delta t \end{cases} \quad (2)$$

当仿真时间足够长时, 受计算机中浮点数运算精度的限制, 计算误差会逐步累加。这一计算误差体现在系统的哈密顿量变化中。为了衡量积分器是否可靠, 我们对积分器保持哈密顿量 (即保持总能量守恒) 的能力进行了测试。

积分器积累的误差与仿真步长和仿真时长都相关。以太阳-地球-月球系统为例, 在以 1 分钟为步长, 为期 1 年的仿真中, 本方法内置的韦尔莱积分器在这一观测过程中没有数值上可见的哈密顿量改变。因此对于凌星光变曲线的仿真而言, 本方法内置的积分器已经足够精确。本方法的目的是提供一个端到端仿真框架, 使用者可以根据需要插入第三方或自行编写的积分器。

3.2 光线矢量的建模

在下面的讨论中, 我们在空间中建立一个绝对的正交直角坐标系 $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ 。观测者相对该坐标系静止。我们同时在恒星对观测者的投影面上建立平面直角坐标系 $(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$ 来方便研究恒星表面亮度的分布。

图 2 展示了在恒星表面建立的平面直角坐标系, 其中观测者的视线方向定义为 $\vec{D} = x\vec{e}_x$, $|\vec{D}|$ 即为恒星相对观测者的距离。

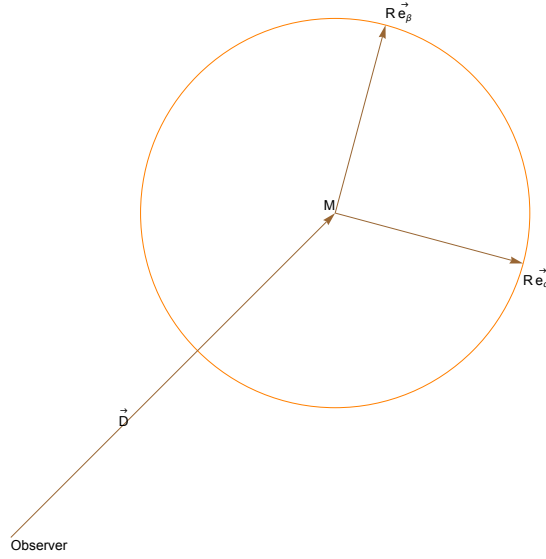


图 2 在恒星对观测者投影面上建立的平面直角坐标系 $(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$, 该坐标平面与观测者的视线方向 $\vec{D}$ 共同构成一个正交直角坐标系。

半径为 R 的恒星对观测者投影面的总亮度可以看作对该平面每一点处的亮度积分得到的, 即当临边昏暗效应沿恒星径向方向 $\vec{e}_r$ 可以表示为 $f(|a\vec{e}_r|)$ 时, 观测者看到的恒星表面亮度在平面直角坐标系 $x\vec{e}_\alpha + y\vec{e}_\beta = a\vec{e}_r$ 上表示为 $I = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dx dy$ 。

与一条直线相垂直的平面的正交基矢量方向与直线无关, 这为坐标系的建立引入了任意性。在程序化的计算过程中需要避免坐标系选择的任意性, 我们使用形式化的方法来建立该坐标系。我们建立的坐标系满足式 3, 其中 k_α 和 k_β 是为了确保单位矢量长度而添加的缩放系数。

$$\begin{cases} \vec{D} \cdot k_\alpha \vec{e}_\alpha = 0 \\ \vec{D} \cdot k_\beta \vec{e}_\beta = 0 \\ \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = 0 \end{cases}, |\vec{e}_\alpha| = |\vec{e}_\beta| = 1 \quad (3)$$

为了求解这个方程组, 我们先取观测者到恒星投影面中心的矢量为 $\vec{D} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ 。若取与观察者相对静止的坐标系为绝对坐标系, 则这个方程组的自由度大于 0, 这表明它存在无穷多个等效的解。为了便于讨论, 我们选择式 4 中给出的一组等效解。选择其他任何解作为坐标系 $(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$ 的基矢量都不会影响最终结果。

$$\begin{cases} \vec{D} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \\ k_\alpha \vec{e}_\alpha = z\vec{e}_x + z\vec{e}_y - (x+y)\vec{e}_z \\ k_\beta \vec{e}_\beta = (z^2 + xy + y^2)\vec{e}_x - (x^2 + xy + z^2)\vec{e}_y + z(y-x)\vec{e}_z \end{cases} \quad (4)$$

将 $k_\alpha \vec{e}_\alpha$ 和 $k_\beta \vec{e}_\beta$ 归一化后即可得到恒星表面坐标系的基矢量。为了使图 2 中的右手系成立, 即各个基矢量的关系与标准正交直角坐标系一致, 最后我们需要调整 $\vec{e}_\beta$ 的符号使其满足 $(\vec{e}_\beta \times \vec{e}_\alpha) \cdot \vec{D} > 0$ 。

在图 3 中, 我们定义了恒星上每一点发出的光被观测者观测到的光线矢量为 $\vec{L}$ 。即从 $x\vec{e}_\alpha + y\vec{e}_\beta$ 处发出的光可以作为一个光强的微元 $f(x, y)dxdy$ 。若该点没有被行星遮挡, 即光线矢量不穿过行星本身, 则总光强的积分 I 中可以保留该元。

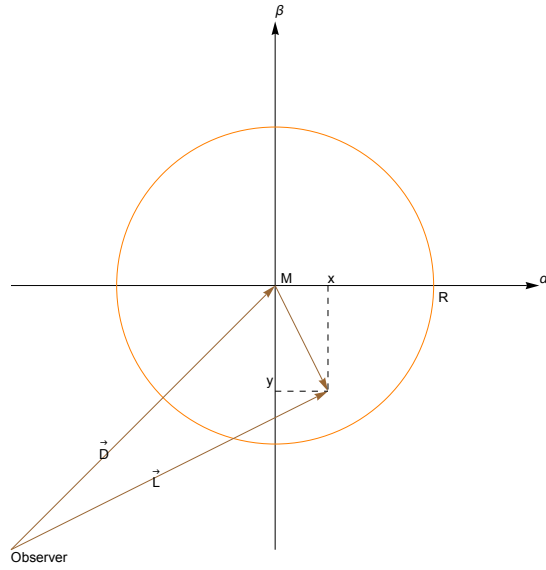


图 3 光线矢量的构造。恒星上每一点 $x\vec{e}_\alpha + y\vec{e}_\beta$ 被观测者观测到的光线矢量为 $\vec{L}$ 。

光线矢量 $\vec{L}$ 的表达式见式 5。

$$\vec{L} = \vec{D} + x\vec{e}_\alpha + y\vec{e}_\beta \quad (5)$$

3.3 亮度积分中是否采纳光线微元判定

本方法通过追踪恒星表面到观测者的每一束光线并判断其是否被行星遮挡来计算恒星表面的总亮度。这一节我们以一颗行星为例, 讨论如何判定光线是否被遮挡。对于多颗行星的情况只需要对每个不透明天体逐一进行计算, 并将遮挡条件的判定以“或”运算综合即可。

定义相对观测者 $\vec{d}$ 处有一颗半径为 r 的行星, 需要注意, 它未必在恒星的投影平面 $(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$ 上。此时发光点到行星中心的位移为 $\vec{d} - \vec{L}$ 。图 4 展示了这种情形。当行星到光线矢量 $\vec{L}$ 的距离小于行星半径时, 这一束光线 $\vec{L}$ 被遮挡, 即我们在光强积分中不采纳该发光微元。

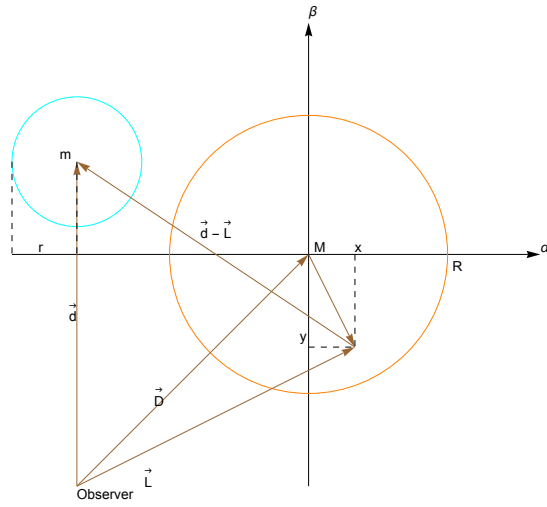


图 4 相对观测者 $\vec{d}$ 处有一颗半径为 r 的行星，这幅图描述了恒星表面的发光点与该天体之间的位置关系。

为了分析行星与光线的位置关系，我们将图 4 的方向调整为平行于 $(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$ 平面，得到图 5。其中矢量 $\vec{g}$ 和 $\vec{p}$ 满足式 6， $\vec{g}$ 的大小 $|\vec{g}|$ 即行星到光线的距离。

$$\begin{cases} \vec{g} = \vec{d} - \vec{L} - \vec{p} \\ \vec{p} \parallel \vec{L} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{p} = \lambda \vec{L} \\ \vec{g} \perp \vec{p} \Leftrightarrow \vec{g} \cdot \vec{p} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{p} = \frac{(\vec{d} - \vec{L}) \cdot \vec{L}}{|\vec{L}|} \cdot \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|} \quad (6)$$

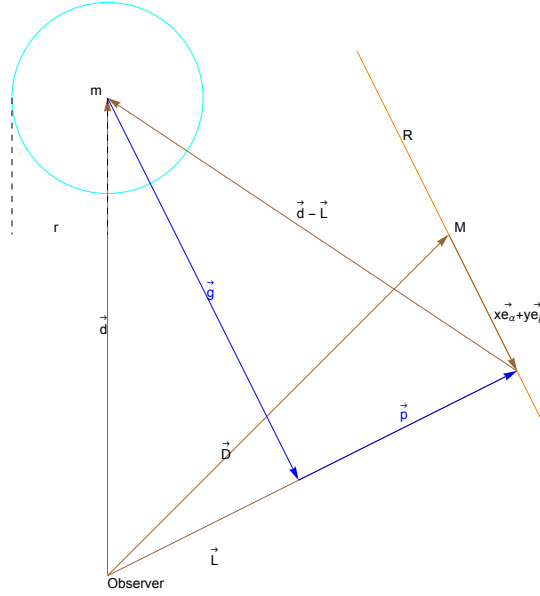


图 5 行星与光线的相对位置图。其中 $\vec{g}$ 的大小 $|\vec{g}|$ 与行星半径 r 的关系决定了恒星发出的光线是否被遮挡。

我们取微元 $dx dy$ 被遮挡的条件为式 7, 该式将微元中心点被遮挡作为整个微元被亮度积分舍弃的条件。

$$\begin{cases} |\vec{g}| < r + \frac{1}{2}dx \\ |\vec{g}| < r + \frac{1}{2}dy \end{cases} \quad (7)$$

为了加快计算速度, 在仿真开始前, 恒星表面沿径向的每个微元的光强都已经通过临边昏暗效应模型计算, 并将计算结果储存在所有运算进程的缓冲区中。这一部分数据在整个仿真过程中无需改动也不需要反复计算。

至此本方法的基本原理已经被阐明。

3.4 计算并行化方法

本方法通过 Julia 的 Distributed 软件包引入了分布式并行化的方法来提高仿真中的硬件利用率, 该软件包为 Julia 核心软件包的一部分, 不需要单独安装和配置。我们在设计时通过 DistributedArrays 软件包引入了分布式内存管理功能。这样使用者可以在多台计算机上联合计算同一个仿真的全部过程, 以充分利用分布式超级计算机的资源。

受多体运动仿真在时间序列上向前的相关性限制, 运动仿真过程无法在时间维度上进行并行。这一部分我们采用在每一个时间点并行计算每个天体的位置与速度更新信息来提高硬件利用率, 这一方法对于天体数量少于计算机线程数的情况获益不高。

在光变曲线仿真方面, 我们将每一个时间点的天体位置数据通过主线程根据负载情况自动分发给其他计算线程。这是因为光线矢量追踪相对任务分配和光变曲线生成过程而言,

所需的计算资源显著增加。子线程不直接访存光变曲线数据所在的内存地址，而是通过参数传递的方式将计算结果返回给主线程统一处理。相对子线程直接访存主线程的光变曲线内存区段而言，这增加了一些内存开销，但确保了线程安全性。使用这一方法可以将实际计算时间从 T 缩短为 $\frac{T}{N-1}$ ，其中 N 为计算机所能承载的总线程数。

为了减少不必要的重复计算开销，所有线程之间共享预计算的临边昏暗效应数据所对应的内存区域，该区域对于所有线程而言是只读的。

4 实际测试

为了展示本方法的仿真结果，我们进行了短期的系外月球系统和长期的多行星系统仿真。本章节所有图中的光度均经过归一化处理。

4.1 短期实验：系外月球系统

多体遮掩从观测者角度可以分为 3 种情形：所有物体完全重合，所有物体完全独立和物体之间相互重叠。下面我们将展示一颗行星及其卫星在不同情况下的仿真结果。这一节中，我们使用步长 10 分钟进行为期 1 天的仿真。仿真中恒星表面亮度的采样数为 1,000,000。为了清晰地展示重叠时光变曲线的细节，其中选择的行星半径约为地球半径的 8.5 倍，卫星半径约为月球半径的 10 倍。即仿真中的行星半径约为卫星半径的 3.1 倍。我们将卫星的轨道周期均取了较大值（行星轨道周期为 88.9 天，卫星轨道周期为 117.0 天），以确保它与行星的相对位置在一次凌星过程中基本保持不变。

恒星表面亮度采样数用来表示：根据临边昏暗效应预先计算的恒星表面沿径向方向上的光强分布的数量。这一参数决定了光变曲线生成的精度。采样数越大，计算精度越高，但是计算复杂度将以二次方关系增加。若恒星表面亮度均匀时，当表面亮度分布采样数为 N 时，则光变曲线的量程为 $\frac{1}{N}$ 。但实际上当恒星表面亮度分布不均匀时，受非线性函数导数不恒定的影响，光变曲线的分辨率（即光度测量的分度值）在凌星中间时刻附近通常会更高。

在此次仿真中，动力学仿真耗时 0.3 秒，恒星表面亮度分布预渲染耗时 2 秒，光变曲线生成耗时 4 秒，光变曲线的分辨度为 0.96 ppm。

下面我们将展示不同遮挡情况下光变曲线的差异。我们使用这样一种图来对比系外月球在不同遮挡情况下向行星凌星的光变曲线引入的影响：在每一组图的左侧同时展示多体遮挡的光变曲线与只有行星存在时的光变曲线，右侧同时展示从多体遮挡光变曲线中减除行星光变曲线和只有月球凌星时的光变曲线。

在左图中我们看到，系外月球在不与行星重合时光变曲线将受到何种影响。且这种影响将随着遮掩情况不同而不同。在右图中我们看到，当系外月球与行星部分重合时，减除行星影响的光变曲线并不与只有系外月球单独存在时的光变曲线一致。这表明，直接在行星光变曲线上叠加卫星光变曲线的方法不能正确反映多体遮掩过程。

图 6 中展示了行星和其卫星完全重叠时的光变曲线。可以在图 6(b) 中看到，本方法可以

给出只有卫星时的光变曲线（即在最小量程内），但从光变曲线中减除只有行星凌星时的光变曲线后差值是恒为 0 的直线。即行星和其卫星完全重叠时卫星不会对光变曲线造成影响。

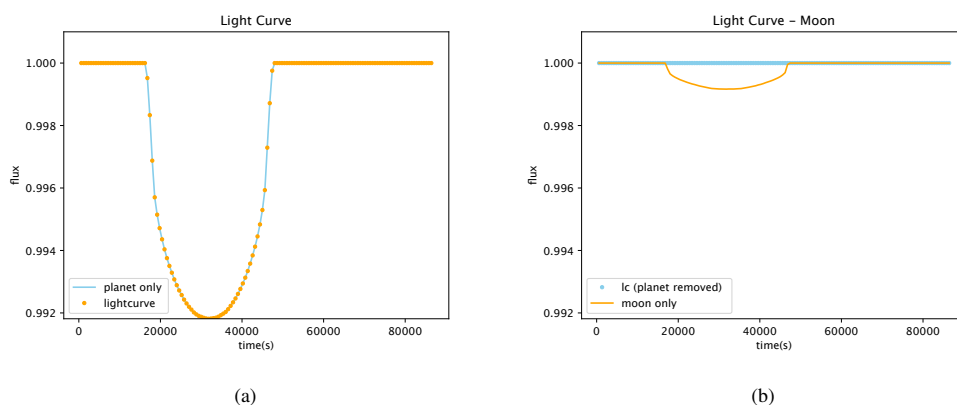


图 6 行星和系外月球重叠时（图 6(a)），光变曲线与只有行星单独凌星时一致。此时，光变曲线可以被行星的光变曲线完全减除，卫星对曲线没有影响（图 6(b)）。

图 7 中展示了行星和其卫星均发生凌星的光变曲线。可以在图 7(b)中看到，从光变曲线中减除只有行星凌星时的光变曲线后差值即为只有卫星凌星时的光变曲线。这表明，在行星和卫星不重叠时，可以将两者单独发生凌星时的光变曲线进行叠加。即向行星的凌星光变曲线中直接注入卫星的凌星信号就可以描述这一过程。

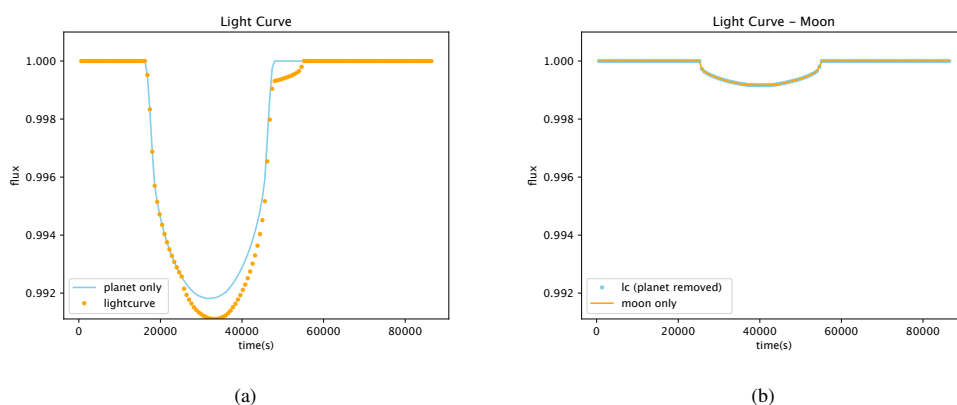


图 7 行星和系外月球完全不重合时（图 7(a)），光变曲线相比只有行星凌星时的光变曲线有所下降。此时（图 7(b)），光变曲线被行星的光变曲线减除后与卫星的光变曲线一致。即此时的光变曲线等效为将卫星的光变曲线直接叠加在行星的曲线上。

图 8 中展示了行星和其卫星部分重叠时凌星的光变曲线，此时重叠部分的面积约为行

星面积的 4.8% (卫星面积的 46.6%)，卫星的光变曲线会对行星的光变曲线引入复杂的变化。这时光变曲线被行星的光变曲线减除后与卫星的光变曲线没有直接关系，光变曲线不能通过直接简单地叠加卫星的光变曲线和行星的曲线来得到。

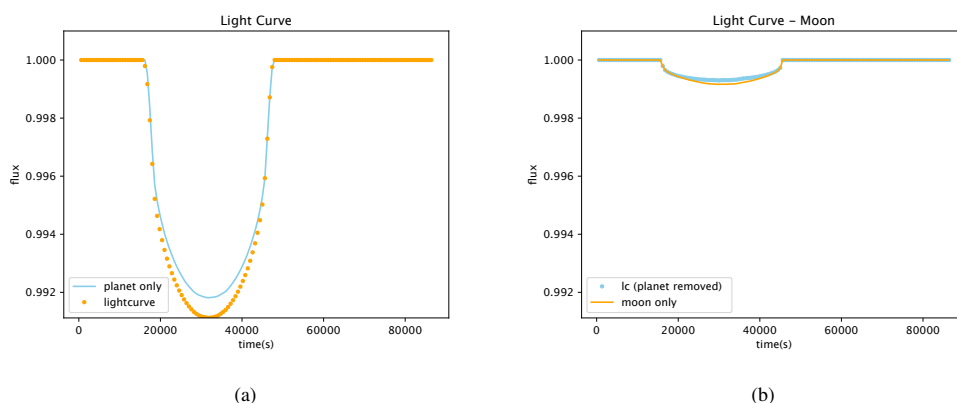


图 8 行星和系外月球部分重叠时 (图 8(a))，光变曲线相比只有行星凌星时的光变曲线略微下降。此时 (图 8(b))，光变曲线被行星的光变曲线减除后与卫星的光变曲线没有直接关系。光变曲线不能通过卫星的光变曲线和行星的曲线直接作用得到。

虽然目前主流的 Pandora 方法^[12]与本方法较为接近，但依然存在下面的不同：

1. 它考虑了行星与其卫星之间的相互遮挡，但它以恒星-行星-卫星三者的几何中心作为遮挡判定条件。在凌星光变曲线进入和离开阶段，它使用一个面积与行星-卫星遮挡面积相同的圆近似作为对恒星表面光度积分的区域。即使在两者不相互遮掩时，该方法也仅对 1/4 卫星遮挡面进行数值积分，并使用该值的 4 倍作为计算结果的近似值。这都使得它丢失了临边昏暗效应在此过程中引入的细节，不会精确处理光变曲线的进入阶段与离开阶段；
2. 它与本方法一样对星面进行网格化并使用预先计算光度缓冲区的方法来加速光度积分，但其使用了平面近似（即恒星-行星-卫星位于同一平面，且星面每一点的光线都与观测者平行）而非矢量方法，这使凌星过程的部分细节（特别是行星与卫星间位置关系对光变曲线造成的影响）丢失；
3. 它使用简化的三体运动模型，并将卫星与行星的遮掩过程抽象为两个圆相交面积的计算，这使得它不能支持多卫星或多行星凌星的情形，且没有完整的动力学仿真计算。

为了给出分辨率与仿真误差的关系，我们将不同分辨率应用在本节的恒星-行星系统（即只有一颗行星发生凌星的情况）中进行了测试。在同一次完整的凌星过程中，我们采用 Mandel-Agol 的直接积分方法^[5]得到的光变曲线作为标准，将本方法得到的光变曲线与标准光变曲线的偏差作为本方法的误差。图 9 中展示了恒星表面分辨率与仿真光变曲线误差的联系。可以看到随着恒星表面分辨率增加，本方法与直接积分法得到的光变曲线间的误差

近似按线性规律减小。

表 1 展示了不同恒星表面分辨率下, 本方法与标准曲线间的偏差。作为参考, 在同一台计算机上, Mandel-Agol 方法计算标准曲线所需的时间为 51435 ms。

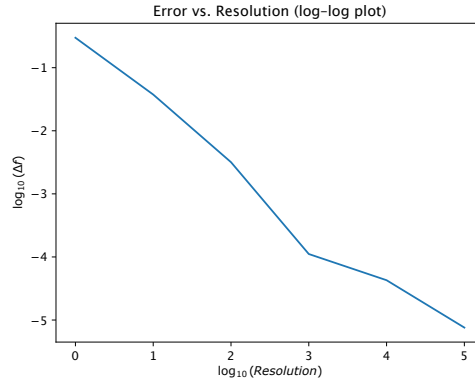


图 9 恒星表面分辨率对仿真结果误差的影响关系。随着恒星表面分辨率增加, 本方法与直接积分法得到的光变曲线间的误差将越来越小。

表 1 本方法与 Mandel-Agol 方法计算标准光变曲线的对比

恒星表面分辨率	与标准曲线的误差 (ppm)	计算时间 (ms)
1	298217	4
10	37502	4
100	3178	6
1000	111	10
10000	43	43
100000	8	372

4.2 长期实验: 多行星系统

为了研究本方法在长周期模拟中的计算性能和计算精度, 我们在本实验中使用 30 分钟为步长进行为期 4 年的仿真。恒星表面亮度采样数取 100,000。这一测试模拟了为期 4 年的观测, 为了体现矢量追踪算法对于任意观测距离的支持能力, 观测者被设置于距离系统 $3pc$ 处。仿真中导致凌星发生的有水星、金星、地球、火星、木星等共计 5 颗行星。起始时太阳位于坐标原点处, 所有行星在太阳的同一平面内从 0 相位处开始运动。行星的初始速度通过 Kepler 第三定律根据轨道半长轴计算得出。

在这次仿真中, 动力学部分耗时 10 秒, 恒星表面亮度分布预渲染耗时 2 秒, 光变曲线生成用时 13 分 07 秒。最终得到的光变曲线分辨率为 $1.32 \times 10^{-3} ppm$ 。

完整的光变曲线展示在图 10(a)中。木星的凌星深度相比其他行星大很多, 为了展示其他行星的凌星光变曲线, 图 10(b)中将纵轴进行了裁剪。

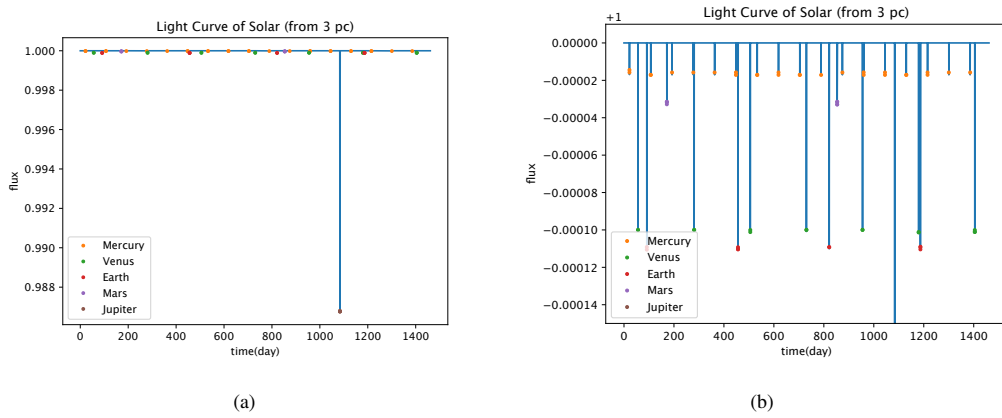


图 10 从 $3pc$ 的距离处观察太阳的光变曲线。持续时长为 4 年，时间分辨度为 30 分钟。从图 10(a)中可以看到本方法能够根据动力学仿真结果生成多个行星在同一个恒星表面的凌星光变曲线。图 10(b)将纵坐标裁剪到合适的位置以避免木星过大的凌星深度影响观察其他行星的凌星光变。图中的点标记出每个行星在靠近凌星中间时刻的光度，用来区分不同行星的凌星光变。

5 总结与展望

本文提出了一种使用光线矢量追踪来生成凌星光变曲线的方法，可以根据动力学仿真结果直接生成多个天体同时凌星的光变曲线。在一些涉及动力学过程和多天体凌星的缺乏足够先验数据的研究领域，如研究系外行星凌星曲线中的动力学参数（如 TTV 方法，TDV 方法等）或研究系外月球对光变曲线的影响等，本方法可以为这些研究提供大量仿真数据支持。

本方法有潜在的可优化部分。比如引入广义相对论建立光线传播模型，就可以使本方法能够应用于具有引力透镜效应的光变曲线生成中。本方法也可以用于生成非球形恒星（如由于大质量行星影响产生潮汐形变的椭圆恒星）的光变曲线。

我们预期在后续的文章中进一步讨论将本方法应用在系外卫星等多天体凌星相关领域的研究。

参考文献：

- [1] Wolszczan A, Frail D A. Nature, 1992, 355: 145
- [2] Mayor M, Queloz D. Nature, 1995, 378: 355
- [3] NASA Exoplanet Archive. <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>, 2025
- [4] Kovács G, Zucker S, Mazeh T. Astronomy & Astrophysics, 2002, 391: 369
- [5] Mandel K, Agol E. The Astrophysical Journal, 2002, 580: L171
- [6] Rouan D. Limb Darkening. Springer Berlin Heidelberg, 2011: 925
- [7] Kreidberg L. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 2015, 127: 1161
- [8] Hippke M, Heller R. Astronomy & Astrophysics, 2019, 623: A39

- [9] Kipping D, Bryson S, Burke C, et al. *Nature Astronomy*, 2022, 6: 367
- [10] Heller R, Hippke M. *Nature Astronomy*, 2023, 8: 193
- [11] Kipping D M. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2011, 416: 689
- [12] Hippke M, Heller R. *Astronomy & Astrophysics*, 2022, 662: A37
- [13] Newton I. *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Motte A. London: J. Societatis Regiæ ac Typis J. Streater, 1687
- [14] Airy G B. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1846, 7: 121
- [15] Agol E, Steffen J, Sari R, et al. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2005, 359: 567
- [16] Holman M J, Murray N W. *Science*, 2005, 307: 1288
- [17] Nesvorný D, Morbidelli A. *The Astrophysical Journal*, 2008, 688: 636
- [18] Damiani C, Lanza A F. *Astronomy & Astrophysics*, 2011, 535: A116
- [19] Agol E, Fabrycky D C. *Handbook of Exoplanets*. Springer International Publishing, 2018: 797
- [20] Boley A C, Laerhoven C V, Contreras A P G. *The Astrophysical Journal*, 2020, 159: 207
- [21] Rauer H, Catala C, Aerts C, et al. *Experimental Astronomy*, 2014, 38: 249
- [22] Rauer H, Aerts C, Cabrera J, et al. *Experimental Astronomy*, 2025, 59
- [23] Ge J, Zhang H, Deng H, et al. *The Innovation*, 2022, 3: 100271
- [24] Ge J, Zhang H, Zhang Y, et al. Coyle L E, Perrin M D, Matsuura S, eds. *Space Telescopes and Instrumentation 2022: Optical, Infrared, and Millimeter Wave*. SPIE, 2022: 41
- [25] Chen W, Chen K, Yang Y, et al. Coyle L E, Perrin M D, Matsuura S, eds. *Space Telescopes and Instrumentation 2022: Optical, Infrared, and Millimeter Wave*. SPIE, 2022: 43
- [26] Ge J, Zhang H, Zhang Y, et al. Coyle L E, Perrin M D, Matsuura S, eds. *Space Telescopes and Instrumentation 2024: Optical, Infrared, and Millimeter Wave*. SPIE, 2024: 45
- [27] GE J, CHEN W, CHEN Y, et al. *Chinese Journal of Space Science*, 2024, 44: 400
- [28] Whitted T. *Communications of the ACM*, 1980, 23: 343
- [29] Kajiya J T. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 1986, 20: 143
- [30] Schnittman J D, Krolik J H, Hawley J F. *The Astrophysical Journal*, 2006, 651: 1031
- [31] Diego J M. *Astronomy & Astrophysics*, 2022, 665: A127
- [32] Pelle J, Reula O, Carrasco F, et al. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2022, 515: 1316
- [33] Arnold V I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer New York, 1989
- [34] Grataroli, Guglielmo. *Alchemiæ, quam vocant, artisq̃ metallicæ, doctrina, certusq̃ modus, scriptis tum novis, tum veteribus, duobus his voluminibus comprehensus : quorum elenchum a præfatione reperiens. per Petrum Pernam*, 1572
- [35] Swope W C, Andersen H C, Berens P H, et al. *The Journal of Chemical Physics*, 1982, 76: 637
- [36] Verlet L. *Physical Review*, 1967, 159: 98
- [37] Runge C. *Mathematische Annalen*, 1895, 46: 167
- [38] Nesvorný D, Kipping D, Terrell D, et al. *The Astrophysical Journal*, 2014, 790: 31

Adfinitās and Aurōra: Simulating Light Curves of Multi-Planet Systems Using Ray Vector Tracing

JIN Luoxi^{1,2}, GE Jian¹

(1. *Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China;* 2. *University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

Abstract: As the transit method becomes one of the most efficient techniques for exo-

planet detection, a key current challenge is how to model more precisely the complex orbital perturbations in multi-planet systems and how these perturbations manifest in light curves. This paper presents an end-to-end framework that goes from dynamical simulation to transit light-curve synthesis. It combines high-precision N-body gravitational dynamics with a ray-tracing algorithm to accurately describe the photometric variations when multiple bodies in a multi-planet system simultaneously occult their host star. The method employs symplectic integrators, such as the velocity Verlet integrator, to ensure conservation of the Hamiltonian over long-term integrations, and uses geometric ray tracing to simulate light curves under complex configurations. It is implemented as an open-source Julia package with strong support for parallel and distributed computing. This method can simulate realistic multi-body transit phenomena and provide simulated data for under-observed regimes—such as exomoon searches. Experiments demonstrate advantages in temporal coverage, simulation accuracy, and scalability, making this a valuable tool for identifying non-periodic perturbation signals in transit data and for modeling and testing secondary effects such as TTV (Transit Timing Variations) and TDV (Transit Duration Variations).

Key words: exoplanets; exomoon; transit; numerical simulation