

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2025.02.XX

基于参数估计精度的月基引力波探测器网络构型优化

易章豪^{1,2}, 边星^{2,3}, 徐鹏^{1,3,4}, 邓琼^{3,4}

(1. 国科大杭州高等研究院 基础物理与数学科学学院, 杭州 310024; 2. 中国科学院大学, 北京 100049;
3. 中国科学院 力学研究所, 北京 100190; 4. 兰州大学 兰州理论物理中心, 兰州 730000)

摘要: 月基引力波探测在 0.1 ~ 10 Hz 频段具有独特观测优势。本文针对中等质量双黑洞并合系统, 评估月基引力波探测器对该类瞬时波源的探测能力。首先基于探测器噪声模型和月球水平响应函数, 计算得到信号信噪比为 23.95, 验证了探测可行性。随后, 采用 Fisher 信息矩阵分析不同探测器网络构型(单测点、双测点、三测点)对参数估计精度的影响。结果显示, 单测点存在探测盲区, 双测点网络可消除盲区, 实现全天空覆盖, 并将参数估计精度提高约 30%, 三测点网络虽能进一步提高约 20% 精度但部署成本显著增加。因此, 采用双测点方案是平衡波源方位探测能力与部署成本的折中选择, 这为未来月基引力波探测器的部署提供了理论依据。

关键词: 月基引力波探测; 网络构型优化; 参数估计精度; Fisher 信息矩阵

中图分类号: P142.8 **文献标识码:** A

1 引言

自 2015 年激光干涉仪引力波天文台 (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, LIGO) 首次直接探测到引力波以来^[1], 引力波天文学已进入多波段、多信使观测的新时代。然而, 现有探测体系在频谱覆盖上仍存在显著空白。LIGO^[2]、室女座干涉仪 (Virgo Interferometer, Virgo) 等地面激光干涉仪着力于探测 10 Hz ~ 10³ Hz 频段的引力波信号; 而 LISA (Laser Interferometer Space Antenna)^[3]、天琴^[4]、太极^[5]等空间探测器最佳探测频段集中于 10⁻⁴ Hz ~ 10⁻¹ Hz。这导致 0.1 Hz 至 10 Hz 这一关键频段成为当前探测体系中的“盲区”^[6]。该频段蕴含着丰富的天体物理过程产生的引力波信号, 如中等质量黑洞 (Intermediate Mass Black Hole, IMBH) 并合、双白矮星 (Double White Dwarfs, DWD) 系统演化^[7]等, 填补该频段的观测能力对于理解致密天体演化、验证引力理论、约束宇宙学参数具有不可替代的科学价值。

收稿日期: YYYY-MM-DD; 修回日期: YYYY-MM-DD

资助项目: 国家重点研发计划 (2025YFE0217300)

通讯作者: 邓琼, dengq19@lzu.edu.cn

针对 0.1~10 Hz 频段,国际上已提出了多种探测方案。在空间探测方面,有学者提出利用多颗航天器搭载高精度光学晶格时钟 (Optical Lattice Clocks, OLCs)^[8],通过测量激光频率的多普勒效应来感知引力波;在月基探测方面,现有方案主要分成月震仪和激光干涉仪两类:前者以月球整体为天线,感受引力波引起的潮汐力,并通过测量由此引发的月球表面振动来提取信号^[9];后者则在月面建立激光干涉测量链路,利用引力波导致干涉臂光程变化的原理进行探测^[10]。相较于系统复杂度高、部署成本高的光学晶格时钟方案,以及需长期维护、工程实现难度大的激光干涉仪方案,月震仪方案具有部署成本低、一次部署后可长期稳定运行、无需人员维护的优势,因此本文着重分析月震仪类型的月基引力波探测方案,其中典型代表为月球引力波天线 (Lunar Gravitational-Wave Antenna, LGWA)^[11]和月球加速度计网络引力观测站 (Lunar Accelerometer Network Gravitational Observatory, LANGO)^[12],这两种方案在探测策略上各有优势与局限。

LGWA 计划以 4 个高灵敏度低温月震仪构建千米级别的局部传感器阵列构型,部署于月球南极附近大型撞击坑所形成的永久阴影区内。该方案的优势在于可以通过阵列内各个传感器的数据进行相关性分析,有效分离并抑制局部的月震背景噪声,从而提取出引力波信号。然而,由于月震仪之间相距极近,因此 LGWA 对波源天空位置的瞬时定位能力较弱,对于持续时间较短的引力波信号,会存在一定的探测方向盲区,而对于持续时间较长的引力波信号,则可能通过月球自转和公转效应解决这一问题;而 LANGO 有两种方案,第一种是由 6 个加速度计组成八面体构型,其中一个位于北极,一个位于南极,四个位于赤道。第二种是由 4 个加速度计组成四面体构型,部署在月球内接正方体 8 个顶点中的 4 个顶点上,这两种构型均具有全天空覆盖以及确定波源天空位置和偏振态的能力。但是,由于加速度计之间相距极远,因此这种全球布局对月震噪声的抑制能力较弱,而且要求在月表不同位置进行多次独立部署,其任务实施难度与部署成本远高于单测点的 LGWA 方案。

因此,针对持续时间较短的引力波信号,如何通过优化网络构型,既保证对波源参数估计的精度,同时尽可能地降低部署成本,是月基引力波探测任务设计中亟待解决的关键问题。为此,本文首先建立包含热噪声与超导量子干涉器件读出噪声的探测器噪声模型,结合月球水平响应函数和天线方向图函数,以中等质量双黑洞并合系统为例,计算其产生的引力波信号信噪比,完成单探测器在目标频段的灵敏度评估。随后,引入 Fisher 信息矩阵方法,定量分析了不同探测器网络构型(单测点、双测点、三测点)的参数估计能力,为未来月基引力波探测任务的测点选址与网络部署提供理论依据。

2 月基引力波探测器及其网络部署方式

月基引力波探测器的性能不仅取决于其自身灵敏度,还与探测器的部署方式及网络构型密切相关。合理的探测器网络设计能够有效抑制环境噪声、提高信号识别能力,并改善波源参数估计的精度。本文将介绍月基引力波探测器的基本工作原理,重点阐述单测点及多测点网络部署的几何构型及其数学描述,为后续的噪声建模与构型优化提供理论基础。

2.1 探测器介绍与部署方式

传统月震测量技术灵敏度距离月基引力波探测需求还有数个量级的差距, 基于超导体宏观量子效应的超导月震测量技术有望达到月基引力波探测需求, 是可行的技术方案。超导月震测量技术基于超导体迈斯纳效应和磁通量子化效应将振动引起的位移信号转化为电流信号, 并以超导量子干涉器件 (Superconducting Quantum Interference Device, SQUID) 进行测量, 从而实现超高测量分辨率^[13]。基于此原理, 中国科学院力学研究所的月基引力波探测器将配备两个独立的、互相垂直的水平位移传感器, 以约 10 kg 的检验质量、金属柔性支撑结构与吸附式制冷机组成超导月震仪, 利用 SQUID 测量检验质量相对于月球表面的位移, 即可提取出引力波信号。

由于 SQUID 需长期在低温下工作以维持超导特性, 因此选址需优先考虑月球上具备长期低温与热稳定性的区域。最理想的位置是月球两极大型陨石撞击坑底的永久阴影区, 其温度可长期低于 40 K^[14]。其次, 在月球两极外的其他月表位置, 如深坑、峡谷或熔岩管内部中, 也可能存在相对低温与稳定的热环境^[15]。因此, 在本文的分析中, 假设所有探测器均部署于此类低温月表位置, 并利用制冷系统将 SQUID 的工作温度稳定在 5 K^[16]。该制冷系统的工作原理是通过吸附材料周期性地“吸入”和“挤出”封装在制冷机内部并循环使用的高压气体, 利用气体膨胀吸热的原理实现制冷; 再通过温度传感器实时监测 SQUID 的工作温度, 并反馈控制吸附床的工作功率, 从而将温度精确锁定在 5 K 附近。

为准确描述探测器的空间位置与朝向, 建立以月球球心 O 为原点的球坐标系 (R, θ_d, ϕ_d) , 其中 R 为月球半径, θ_d 为极角, 取值范围 $[0, \pi]$, ϕ_d 为方位角, 取值范围 $[0, 2\pi]$ 。探测器的探测方向在本地切平面内分别定义为 $\hat{e}_{\text{det1}}$ 与 $\hat{e}_{\text{det2}}$, 法线方向定义为 $\hat{e}_r$ 。假设 $\hat{e}_r$ 为由月心指向探测器位置的向量, $\hat{e}_{\text{det1}}$ 与 $\hat{e}_{\text{det2}}$ 为两个正交的水平探测方向, 构成局部右手坐标系。具体表达式如下:

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta_d \cos \phi_d \\ \sin \theta_d \sin \phi_d \\ \cos \theta_d \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_{\text{det1}} = \begin{pmatrix} \cos \theta_d \cos \phi_d \\ \cos \theta_d \sin \phi_d \\ -\sin \theta_d \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_{\text{det2}} = \begin{pmatrix} -\sin \phi_d \\ \cos \phi_d \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

由两个水平探测方向 $\hat{e}_{\text{det1}}$ 与 $\hat{e}_{\text{det2}}$ 所张成的平面, 称为该测点的探测平面。该平面在几何上即为月球表面在探测器位置处的切平面, 其法向量为 $\hat{e}_r$ 。

探测平面是探测器对引力波引起的月球表面位移变化进行测量的敏感平面, 这种位移变化将被两个正交的传感器所探测; 而沿平面法线的位移变化, 探测器理论上不敏感。

当引力波沿任意方向入射时, 其入射方向由 (θ, ϕ, φ) 确定, 假设引力波沿着 z 轴方向入射, 则 $\theta = \phi = \varphi = 0$ 。月基引力波探测器部署方式如图1所示。

2.2 单测点探测器网络部署方式

为系统研究不同部署策略对参数估计能力的影响, 本文将按照单测点与多测点两种思路展开。本节首先介绍单测点部署策略, 为后续评估其参数估计能力奠定基础。

单测点部署是指在月球表面某一选定位置布置一套探测器单元。在实际部署中, 为了

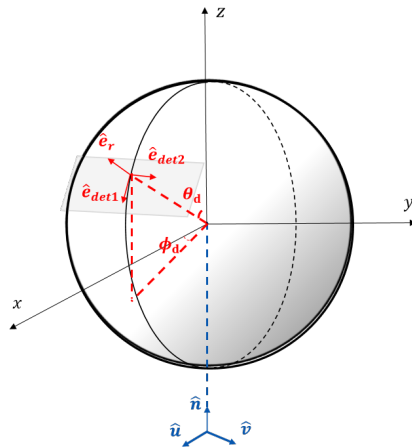


图1 月基引力波探测器部署示意图

进一步抑制月球复杂的月震噪声并提高信噪比, 本文单测点采用与 LGWA 方案一致的部署策略, 即在单个测点处部署一个由四台高灵敏度月震仪构成的局部阵列, 阵列基线距离为千米级。该阵列以测点坐标 (R, θ_d, ϕ_d) 为中心, 其中一台月震仪位于阵列中心, 其余三台在周围呈三角形分布, 第 k 个传感器的探测方向定义为 $\hat{e}_{detk}$ ($k = 1, 2, \dots, 8$)。其构型如图2所示, 短箭头表示各传感器的探测方向。

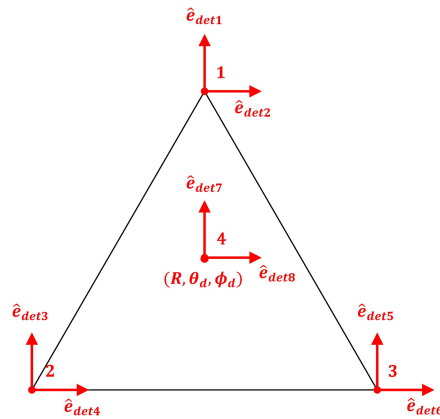


图2 单测点局部三角形阵列构型

该阵列借鉴了 Virgo 等地面引力波探测器的牛顿噪声抵消技术^[17], 以实现月震噪声的有效抑制。该技术的基本原理是通过部署地震仪阵列监测环境中的地震场, 利用其与牛顿噪声的相关性, 构建一个基于机器学习的替代维纳滤波器, 对地震仪信号进行处理以预测牛顿噪声的幅度, 最终从引力波探测器数据中实时减去该预测值, 从而显著降低噪声干扰。在本文后续分析中, 假设通过该阵列的处理, 月震噪声的影响可被抑制至显著低于探测器仪器本底噪声的水平, 从而在研究频段内不再构成限制灵敏度的主要因素。

由于探测器之间的距离远小于月球半径, 四个探测器的位置坐标差异极小, 因此, 可以近似认为它们共享同一个球坐标 (R, θ_d, ϕ_d) , 各自的探测平面也近似平行。

关于单测点的全局部署, 本文参考了 LGWA 与 LANGO 方案的部署位置^[11, 12], 并进一步考虑了三类部署位置集合: 赤道平面位置、子午线半球面位置以及球内接正方体顶点位置, 如图3所示。

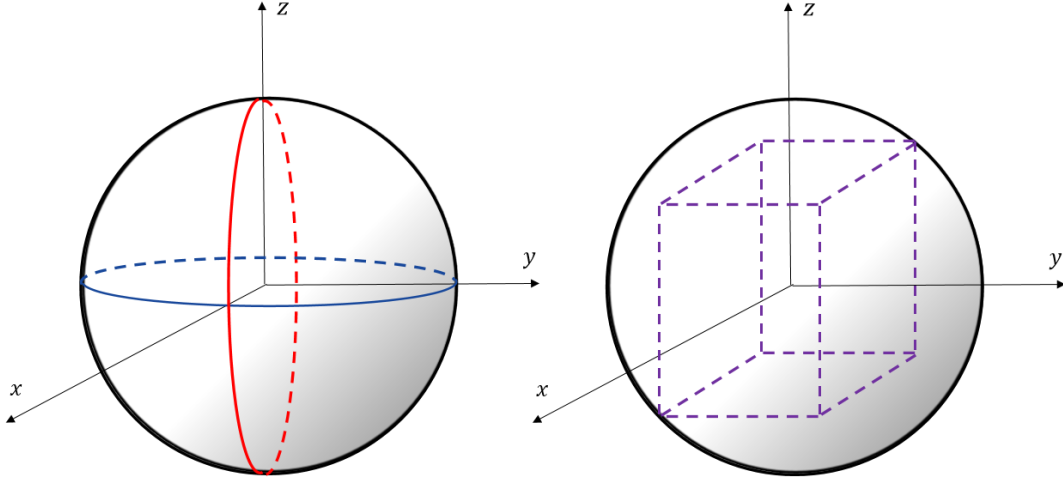


图3 单测点全局候选部署位置

① 赤道平面位置: 固定极角 $\theta_d = \pi/2$, 方位角 ϕ_d 在 $[0, 2\pi]$ 内采样, 研究方位角变化对参数估计精度的影响。

② 子午线半球面位置: 固定方位角 $\phi_d = 0$, 极角 θ_d 在 $[0, \pi]$ 内采样, 研究极角变化对参数估计精度的影响。

③ 球内接正方体顶点位置: 将月球近似为球体, 考虑其内接正方体的八个顶点在月表的球面投影点。这些点对应于特定的 (θ_d, ϕ_d) 组合, 例如 $(\pi/4, \pi/4)$, $(\pi/4, 3\pi/4)$, $(\pi/4, 5\pi/4)$, $(\pi/4, 7\pi/4)$ 等。

2.3 多测点探测器网络部署方式

多测点部署是指通过在月球表面不同位置布设两个或以上规模相同的测点, 构成空间探测器网络, 旨在克服单点探测的方向盲区, 提升波源定位与参数估计能力。

一个由 N 个测点组成的网络, 其位置集合可定义为 Ω :

$$\Omega = \{(R, \theta_{di}, \phi_{di}) \mid i = 1, \dots, N\} \quad (2)$$

其中 $(R, \theta_{di}, \phi_{di})$ 为第 i 个测点的球坐标。

3 探测器灵敏度评估

探测器灵敏度是衡量月基引力波探测系统性能的核心指标，决定了其能够探测到的引力波信号强度下限。本章将建立月基引力波探测器噪声模型，结合月球水平响应函数和天线方向图函数，针对中等质量双黑洞并合系统波源，通过比较信号和噪声的特征应变，以及计算信噪比来进行灵敏度评估。

3.1 探测器噪声

假设在单测点中已经将深月震、浅月震、热月震以及陨石撞击等月震噪声的影响抑制至显著低于探测器仪器本底噪声的水平^[11]，那么超导月震测量灵敏度在理论上主要受限于热噪声和 SQUID 读出噪声^[18]。

热噪声源于检验质量与其周围气体分子间的热能量交换过程。该过程会对检验质量产生随机涨落的作用力，进而引起其热运动，表现为位置的随机波动，最终形成噪声信号^[19]，其功率谱密度可表示为：

$$x_{\text{th}}^2(f) = \frac{4k_B T \omega_0^2}{m Q \omega_g^5}, \quad (3)$$

其中， k_B 为玻尔兹曼常数， T 为探测器温度， ω_0 为探测器的固有频率， Q 为机械品质因数， m 为检验质量， $\omega_g = 2\pi f$ 为引力波角频率。

SQUID 读出噪声则与信号读出电路的电子学特性相关^[20]，其功率谱密度为：

$$x_{\text{squid}}^2(f) = \frac{2E_A \left(1 + \frac{f_c}{f}\right)}{m \omega_0 \eta \beta} \frac{(\omega_g^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega_0^4}{Q^2}}{\omega_g^4}, \quad (4)$$

其中， E_A 为 SQUID 的能量分辨率， f_c 为 $1/f$ 噪声的转角频率， $\eta\beta$ 为信号耦合效率。

探测器的总仪器噪声功率谱密度为两者之和：

$$P_n(f) = x_{\text{th}}^2(f) + x_{\text{squid}}^2(f). \quad (5)$$

本文使用的惯性传感器参数如表1所示。

为了直观展示各噪声成分的特性及其对总噪声的贡献，图4给出了热噪声、SQUID 读出噪声及总仪器噪声的幅度谱密度曲线。

图4中仪器噪声的幅度谱密度曲线表明，不同频段由不同的噪声成分主导。在低频段，热噪声 ($\propto f^{-2.5}$) 占据主导，其幅度随频率上升而急剧下降。在高频段，相对平坦的 SQUID 读出噪声占据主导，其幅度随频率上升而缓慢下降。同时，仪器噪声在 0.1~1 Hz 频段已经达到 $10^{-14} \text{ m}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$ 量级，已经接近月基引力波探测对月震仪的需求。

3.2 月球响应函数

月球对引力波的响应可以理解所有被激发的简正模的线性叠加。在长波长近似下，假定月球为径向非均匀、横向均匀、表面无地形起伏的弹性对称球，在引力波作用下，主要激

表 1 惯性传感器参数

参数	符号	数值	单位
检验质量	m	10	kg
固有频率	ω_0	0.25	Hz
温度	T	5	K
机械品质因数	Q	10^6	/
SQUID 能量分辨率	E_A	5.272863×10^{-33}	J/Hz
信号-SQUID 耦合效率	$\eta\beta$	0.25	/
$1/f$ 转角频率	f_c	10	Hz

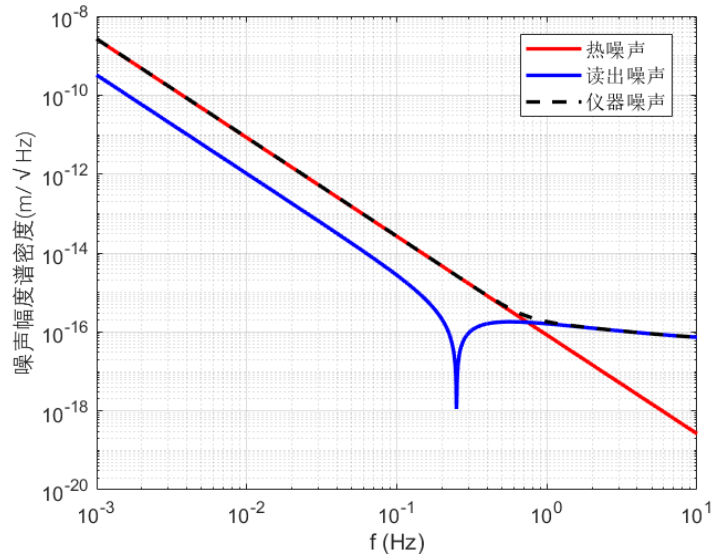


图 4 月震仪噪声幅度谱密度曲线

发球面序数 $l = 2$ 的球型振荡模^[21], 引力波引起的月球表面应变即月球表面响应可表示为^[22]:

$$\begin{aligned}
 \vec{\xi}(\theta, \varphi, t) = h_0 \cos(\omega_g t) & \left[T_r \sum_m f^m \mathcal{Y}_{2m}(\theta, \varphi) \hat{e}_r \right. \\
 & + T_h \sum_m f^m \partial_\theta \mathcal{Y}_{2m}(\theta, \varphi) \hat{e}_\theta \\
 & \left. + T_h \sum_m f^m \frac{\partial_\varphi \mathcal{Y}_{2m}(\theta, \varphi)}{\sin \theta} \hat{e}_\varphi \right], \quad (6)
 \end{aligned}$$

其中, h_0 为引力波幅度, f^m 是与引力波波矢量和极化有关的“模式函数”, $\mathcal{Y}_{2m}(\theta, \varphi)$ 为实球谐函数。径向和水平响应函数分别定义为:

$$T_r \equiv \sum_n U_{2n} \alpha_{2n} \Re \left\{ \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_g^2 + i\omega_n \omega_g / Q_n} \right\}, \quad (7)$$

以及

$$T_h \equiv \sum_n \frac{V_{2n}}{\sqrt{6}} \alpha_{2n} \Re \left\{ \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_g^2 + i\omega_n \omega_g / Q_n} \right\}, \quad (8)$$

其中, 响应系数 $\alpha_{2n} = -\frac{\omega_g^2}{2} \frac{\int_0^R [U_{2n}(r) + \frac{3}{\sqrt{6}} V_{2n}(r)] \rho(r) r^3 dr}{\int_0^R [U_{2n}^2(r) + V_{2n}^2(r)] \rho(r) r^2 dr}$ 。 $U_{2n}(r)$ 和 $V_{2n}(r)$ 分别为第 n 阶 $l=2$ 球型模的径向和横向本征函数; $\rho(r)$ 为月球密度; ω_n 和 Q_n 分别为第 n 阶简正模的本征角频率和品质因数。

第 k 个传感器沿 $\hat{e}_{\text{det } k}$ 方向探测到的表面响应为:

$$\xi = \vec{\xi}(\theta, \varphi, t) \cdot \hat{e}_{\text{det } k}. \quad (9)$$

由于本文研究的探测器仅对月球表面切平面内的水平信号敏感, 因此重点分析与讨论水平响应函数 $T_h(f)$ 。

为计算 $T_h(f)$, 本文采用文献^[20]中提供的月球分层模型, 如图5所示, v_p 为压缩波速, v_s 为剪切波速, 其核心结构包含一个均匀的月球内核以及位于内核外部的低速带。为提升高频段的计算精度, 本文对原始模型数据进行插值处理, 生成了 28501 层月球模型。

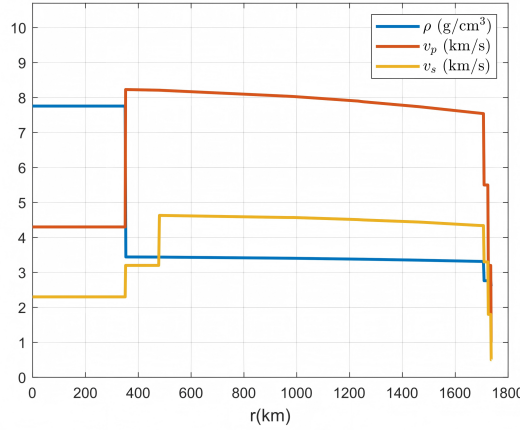


图5 月球分层模型

再利用 MINEOS 软件求解出 $U_{2n}(r)$ 、 $V_{2n}(r)$ 、 ω_n 及 Q_n , 最后通过式 (8) 进行计算, 得到水平响应函数 $T_h(f)$ 如图6所示。

由图6可知, 月球对低频引力波信号的响应更强, 同时在月球简正模的本征频率附近会

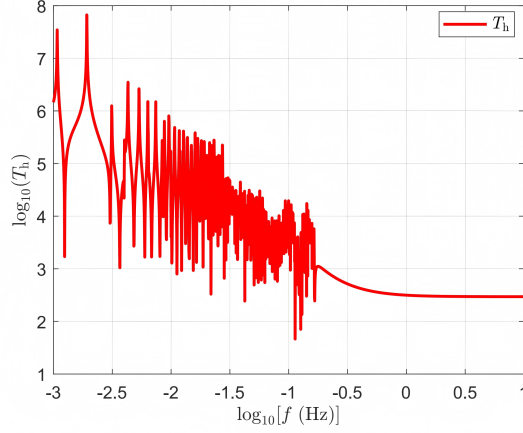


图6 水平响应函数曲线

出现尖锐的共振峰, 月球对引力波的响应会被显著放大。

3.3 天线方向图函数

天线方向图函数定量描述了不同位置下的探测器对来自不同天空方向和不同极化的引力波的响应幅度^[23]。对于部署在月表 (R, θ_d, ϕ_d) 处的探测器, 在引力波沿着 z 轴方向入射的情形下, 其两个正交的水平传感器 ($k = 1, 2$) 对“+”和“×”极化模式的天线方向图函数分别定义为^[24]:

$$F_+^{(k)}(\theta_d, \phi_d, f) = 2T_h(f) (\hat{e}_{\text{det } k} \cdot \mathbf{e}_+ \cdot \hat{e}_r), \quad (10)$$

$$F_\times^{(k)}(\theta_d, \phi_d, f) = 2T_h(f) (\hat{e}_{\text{det } k} \cdot \mathbf{e}_\times \cdot \hat{e}_r), \quad (11)$$

其中, $\mathbf{e}_+$ 和 $\mathbf{e}_\times$ 分别为“+”和“×”极化的偏振张量, 定义为:

$$\mathbf{e}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\times = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

为直观评估探测器位置对天线响应能力的影响, 本文将球坐标系下的天线方向图函数变换至直角坐标系进行可视化。图7和图8分别展示了在 0.1 Hz 和 1 Hz 频率下, 两个传感器的天线方向图及其均方根综合响应 $\sqrt{|F_+^{(k)}|^2 + |F_\times^{(k)}|^2}$ 的三维分布, 图中颜色越深代表响应能力越强。

由图7和图8可知, 天线方向图函数呈现出以下特征: 首先, 每个传感器对“+”和“×”两种极化模式的方向图均表现出四极矩瓣状结构, 表明探测器响应强烈依赖于其部署位置坐标, 具有高度的方向敏感性。其次, 在同一测点处, 两个相互正交的传感器在绝大多数天空方向上形成了有效的互补响应, 即当一个传感器的响应较弱时, 另一个往往较强, 从而

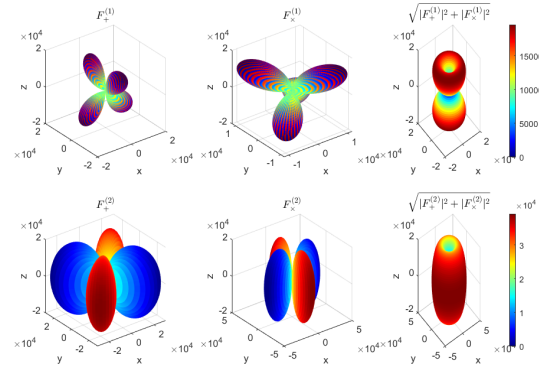


图7 探测器在 0.1 Hz 频率下的天线方向图函数

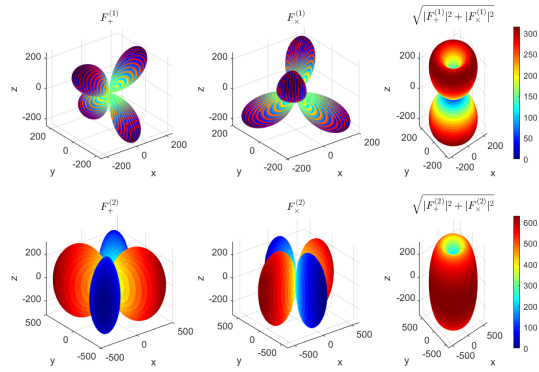


图8 探测器在 1 Hz 频率下的天线方向图函数

提升了整体鲁棒性。然而，当 $z = 0$ ，即 $\theta_d = \pi/2$ ，也就是引力波入射方向平行于探测平面时，其中一个传感器的响应趋近于零，形成明显的探测盲区。最后，随着频率从 0.1 Hz 升高至 1 Hz，同一位置下的综合响应强度下降约两个数量级，证实了探测器对低频引力波信号具有更强的响应能力。

3.4 信噪比

中等质量双黑洞并合系统是月基引力波探测器在 0.1 ~ 10 Hz 频段内最具代表性的目标波源之一。该类波源的总质量通常在 $10^2 \sim 10^4 M_\odot$ 范围，由于 LIGO 所探测到的恒星质量双黑洞信号持续时间极短，通常在亚秒至几秒量级，因此对于质量更高的中等质量双黑洞系统，其并合过程产生的引力波信号持续时间可以认为同样极短^[25]。由于月球的自转周期与公转周期均为 27.3 天，在这一短暂的信号持续时间内，月球可近似视为静止，探测器的空间位置和探测方向相对于地月系质心、太阳等参考系保持不变，这使得单测点对波源天空位置的瞬时响应具有固定的方向依赖性，因而存在固有的探测盲区，无法实现全天空覆盖下的高精度参数估计。因此，研究此类瞬时波源对于揭示单点部署的局限性、论证多测

点网络构型在提升参数估计精度方面的必要性具有重要意义。

本文以中等质量双黑洞并合系统为例, 评估月基探测器对该类波源的探测能力。在频域中, 引力波的“+”和“×”两种极化模式的波形可表示为^[26]

$$\tilde{h}_+(f) = A(f) \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} e^{i\Psi(f)}, \quad (13)$$

$$\tilde{h}_\times(f) = iA(f) \cos \iota e^{i\Psi(f)}. \quad (14)$$

其中, ι 为轨道角动量与视线方向的夹角。根据 PhenomA 波形模型, 中等质量双黑洞旋进-并合系统的引力波信号振幅可以表示为

$$A(f) \equiv \sqrt{\frac{5}{24} \frac{(GM_c/c^3)^{5/6}}{\pi^{2/3} (D_L/c)}} f_0^{-7/6} \begin{cases} \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-7/6}, & f < f_0, \\ \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-2/3}, & f_0 \leq f < f_1, \end{cases} \quad (15)$$

其中, 红移后的总质量 $M = (1+z)(m_1 + m_2)$, z 为红移, 对称质量比 $\eta = \frac{m_1 m_2}{M^2}$, 红移后的啁啾质量 $M_c = (1+z) \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{M^{1/5}}$, D_L 为光度距离, c 为光速, G 为引力常数。 f_0 和 f_1 分别对应并合频率、铃宕频率, 定义为

$$f_n \equiv \frac{a_n \eta^2 + b_n \eta + c_n}{\pi(GM/c^3)}, \quad (n = 0, 1), \quad (16)$$

其中, 系数 $a_0 = 2.9740 \times 10^{-1}$, $b_0 = 4.4810 \times 10^{-2}$, $c_0 = 9.5560 \times 10^{-2}$, $a_1 = 5.9411 \times 10^{-1}$, $b_1 = 8.9794 \times 10^{-2}$, $c_1 = 1.9111 \times 10^{-1}$ 。

波形相位的展开式为

$$\Psi(f) = 2\pi f t_0 + \phi_0 + \sum_{j=0}^7 \psi_j f^{(j-5)/3}, \quad (17)$$

$$\psi_j = \frac{x_j \eta^2 + y_j \eta + z_j}{\eta(\pi M)^{(5-j)/3}}, \quad (18)$$

其中, t_0 为并合时间, ϕ_0 为并合相位。在 PhenomA 模型中, ψ_j ($j = 0, 2, 3, 4, 6, 7$) 取值如表 2 所示^[27]。

在平坦 Λ CDM 模型中^[28], 光度距离 D_L 与红移 z 的关系为

$$D_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_M(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}}, \quad (19)$$

其中, 哈勃常数 $H_0 = 67 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, 物质密度参数 $\Omega_M = 0.32$, 暗能量密度 $\Omega_\Lambda = 0.68$ 。

近年来, 已有研究通过数值模拟发现^[29], 在致密的年轻星团中, 由于大质量恒星在星团

表 2 PhenomA 波形模型的相位系数

相位参数	x_j	y_j	z_j
ψ_0	1.7516×10^{-1}	7.9483×10^{-2}	-7.2390×10^{-2}
ψ_2	-5.1571×10^{-1}	-1.7595×10^{-1}	1.3253×10^{-1}
ψ_3	6.5866×10^{-2}	1.7803×10^{-2}	-1.5972×10^{-2}
ψ_4	-3.9031×10^{-3}	-7.7493×10^{-2}	8.8195×10^{-2}
ψ_6	-2.4874×10^{-4}	-1.4892×10^{-3}	4.4588×10^{-3}
ψ_7	2.5196×10^{-4}	3.3970×10^{-2}	-3.9573×10^{-3}

核心区域因动力学摩擦快速沉降,可能触发“碰撞失控”过程,最终形成质量可达数千倍太阳质量的黑洞,并进一步形成双黑洞系统。因此,在距离我们较近的宇宙,如星暴星系或矮星系中的致密年轻星团内,发现此类系统的可能性是存在的。

为进行灵敏度评估,本文波源参数取值如下: $\iota = \frac{\pi}{4}, m_1 = m_2 = 10^4 M_\odot, z = 0.005, M_c = 0.875 \times 10^4 M_\odot, \eta = 0.25, D_L \approx 0.0225 \text{ Gpc}, t_0 = 0, \phi_0 = 0$ 。

第 k 个传感器的应变为:

$$\tilde{h}^{(k)}(f) = F_+^{(k)}(\theta_d, \phi_d, f) \tilde{h}_+(f) + F_\times^{(k)}(\theta_d, \phi_d, f) \tilde{h}_\times(f) \quad (20)$$

比较信号幅度和探测器噪声的一种简便方法是将其转换为特征应变。信号特征应变 $h_c^{(k)}(f)$ 通过下式计算:

$$h_c(f) = 2f \left(|\tilde{h}_+(f)|^2 + |\tilde{h}_\times(f)|^2 \right)^{1/2} \quad (21)$$

传感器的噪声特征应变 $h_n^{(k)}(f)$ 定义如下:

$$h_n^{(k)}(f) = \sqrt{f S_n^{(k)}(f)} \quad (22)$$

其中, $S_n^{(k)}(f)$ 为传感器灵敏度,单位为 Hz^{-1} 。它由仪器噪声功率谱 $P_n(f)$ 与信号响应函数 $\mathcal{R}^{(k)}(f)$ 共同决定^[26]:

$$S_n^{(k)}(f) = \frac{P_n(f)}{\mathcal{R}^{(k)}(f)} \quad (23)$$

传感器中信号功率 $\tilde{h}^{(k)}(f) \tilde{h}^{(k)*}(f)$ 通过 $\mathcal{R}^{(k)}(f)$ 与原始信号功率 $|\tilde{h}_+(f)|^2 + |\tilde{h}_\times(f)|^2$ 相关联:

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{(k)}(f) \tilde{h}^{(k)*}(f) &= F_+^{(k)}(f) F_+^{(k)*}(f) |\tilde{h}_+(f)|^2 + F_\times^{(k)}(f) F_\times^{(k)*}(f) |\tilde{h}_\times(f)|^2 \\ &= \mathcal{R}^{(k)}(f) \left(|\tilde{h}_+(f)|^2 + |\tilde{h}_\times(f)|^2 \right) \end{aligned} \quad (24)$$

则 $\mathcal{R}^{(k)}(f)$ 被定义为:

$$\mathcal{R}^{(k)}(f) = \frac{F_+^{(k)}(f)F_+^{(k)*}(f)\left|\tilde{h}_+(f)\right|^2 + F_\times^{(k)}(f)F_\times^{(k)*}(f)\left|\tilde{h}_\times(f)\right|^2}{\left|\tilde{h}_+(f)\right|^2 + \left|\tilde{h}_\times(f)\right|^2} . \quad (25)$$

对于单个探测器, 假设仪器噪声为高斯、平稳且在传感器间独立, 则中等质量双黑洞并合过程产生的引力波信号的总信噪比平方为其正交的两个传感器信噪比平方之和:

$$\text{SNR}^2 = \sum_{k=1}^2 \int_{f_0}^{f_1} \frac{h_c^2(f)}{\left[h_n^{(k)}(f)\right]^2} d(\ln f) . \quad (26)$$

将探测器置于位置 $(R, \theta_d = \pi/4, \phi_d = \pi/4)$ 处, 计算上述中等质量双黑洞并合系统波源的特征应变, 结果如图9所示。

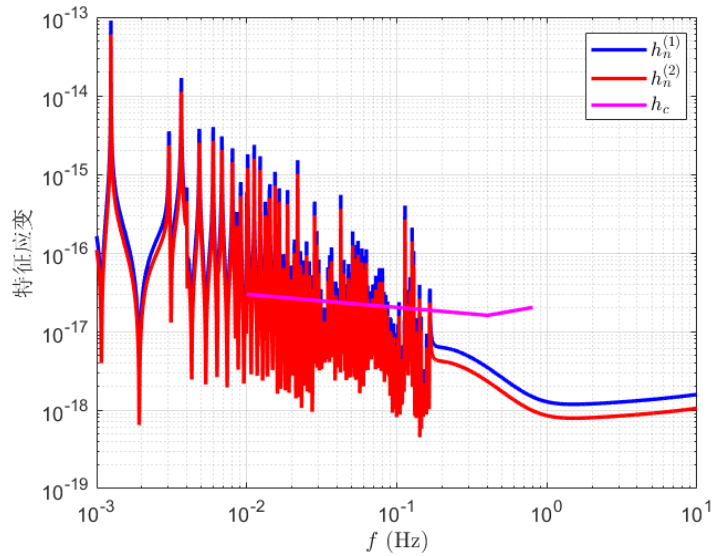


图9 探测器灵敏度评估

分析图9可知, 对于所选的中等质量双黑洞并合系统波源, 在 0.1 Hz 至 1Hz 频段内, 两个探测方向上的信号特征应变均高于噪声特征应变。进一步通过式 (26) 计算得到引力波信号的信噪比为 23.95。这一结果表明, 中等质量双黑洞并合系统产生的引力波信号在目标频段内可以被探测到, 验证了月基探测方案的可行性。

需要指出的是, 上述信噪比计算基于探测器工作温度稳定在 5K 的理想假设。由文献^[10]可知, 在日-地系统 L2 拉格朗日点的深空环境中, 利用被动辐射冷却技术即可将光学元件冷却至 40K, ESA 达尔文任务在此低温基础上, 采用制冷系统将探测器进一步降温至 4-6 K 并

稳定工作。本文将探测器放置在月球的长期低温环境下，如永久阴影区、熔岩管、深坑、峡谷中，并借鉴与 ESA 达尔文任务相似的制冷技术，由于实际运行中可能受到太阳活动、探测器自身热扰动等因素的影响，考虑一定的冗余，本文假设探测器的工作温度在制冷系统的调节下会在 4–10K 范围内波动。热噪声功率与温度成正比，若温度升至 10 K，热噪声功率将增加，信噪比将降至 20.35，仍可满足探测需求。因此，月基引力波探测器对中等质量双黑洞并合信号的探测具有较强鲁棒性。

4 不同网络构型的参数估计精度评估与优化方法

引力波参数估计精度直接决定了对波源参数的反演能力，参数估计精度由参数估计值的不确定度量化，该值越小，表明参数估计越精确，参数估计精度越高^[27]。而 Fisher 信息矩阵是量化探测系统参数估计能力的核心工具。本文采用了 Fisher 信息矩阵系统评估并比较单测点、双测点及三测点网络构型对中等质量双黑洞并合系统波源参数的估计误差，从而为最优网络部署提供理论依据。

4.1 Fisher 信息矩阵与参数不确定度

对于本文选取的待估参数 $\theta = \{\iota, \ln M_c, \eta, D_L, t_0, \phi_0, \theta_d, \phi_d\}$ ，Fisher 信息矩阵定义为^[28]：

$$F_{ij} = 4 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N_d} \sum_{k=1}^2 \sum_m \left[\frac{\frac{\partial \tilde{h}_n^{(k)*}(f_m)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{h}_n^{(k)}(f_m)}{\partial \theta_j}}{S_n^{(k)}(f_m)} \Delta f \right], \quad (27)$$

其中， N_d 为探测器数量， $\tilde{h}_n^{(k)}(f_m)$ 是第 n 个探测器的第 k 个传感器在离散频率点 f_m 处测得的引力波信号的傅里叶变换， $\tilde{h}_n^{(k)*}(f_m)$ 为 $\tilde{h}_n^{(k)}(f_m)$ 的复共轭， θ_i 为源参数的第 i 个分量，频率分辨率 $\Delta f = 1/T_{\text{obs}}$ ，数据时长 $T_{\text{obs}} = 1000 \text{ s}$ 。

通过求解 Fisher 信息矩阵的逆矩阵，可获得由参数计算出的协方差矩阵：

$$\Sigma = F^{-1}, \quad (28)$$

参数的不确定度由协方差矩阵的对角元素给出：

$$\Delta \theta_i = \sqrt{\Sigma_{ii}}. \quad (29)$$

其中， $\Delta \theta_i$ 为第 i 个参数的估计误差。

本文选择 5 个参数：啁啾质量 M_c 、光度距离 D_L 、轨道倾角 ι 、引力波频率 f_0 、初始相位 ϕ_0 ，其中 $M_c = 0.52 M_\odot$ ， $D_L = 1 \text{ kpc}$ ， $f_0 = 0.1 \text{ Hz}$ ， $\phi_0 = \iota = \pi/4$ 。

4.2 单测点参数估计精度评估

为系统评估测点位置选择对参数估计精度的影响, 本文选取了第 2.2 节所述的三类候选位置 (赤道平面、子午线半球面、球内接正方体顶点), 针对中等质量双黑洞并合系统波源, 利用 Fisher 信息矩阵计算了八个关键波源参数的估计误差 $\Delta\theta_i$, 评估结果如表3所示。

表3 单测点在不同位置下的参数估计结果

θ_d	ϕ_d	Δt	$\Delta \ln M_c$	$\Delta \eta$	ΔD_L	Δt_0	$\Delta \phi_0$	$\Delta \theta_d$	$\Delta \phi_d$
(rad)	(rad)	(rad)	($\ln M_\odot$)		(Gpc)	(s)	(rad)	(rad)	(rad)
$\pi/6$	0	0.00021	0.00030	0.00036	0.00018	0.00051	0.00014	0.00037	0.00121
$\pi/4$	0	0.00008	0.00023	0.00015	0.00016	0.00036	0.00010	0.00022	0.00096
$\pi/3$	0	0.00010	0.00024	0.00012	0.00017	0.00037	0.00010	0.00013	0.00101
$\pi/2$	0	2992.74	4626.79	1995.43	1672.76	5320.11	0.00145	4038.14	6935.52
$2\pi/3$	0	0.00010	0.00024	0.00012	0.00017	0.00037	0.00010	0.00013	0.00101
$3\pi/4$	0	0.00008	0.00023	0.00015	0.00016	0.00036	0.00010	0.00022	0.00096
$5\pi/6$	0	0.00021	0.00030	0.00036	0.00018	0.00051	0.00014	0.00037	0.00121
$\pi/2$	$\pi/2$	2746.21	4864.57	1881.33	2223.86	5747.74	0.00145	3705.43	6507.79
$\pi/2$	π	2992.74	4626.79	1995.43	1672.76	5320.11	0.00145	4038.14	6935.52
$\pi/4$	$\pi/4$	0.00013	0.00023	0.00011	0.00015	0.00034	0.00009	0.00021	0.00098
$\pi/4$	$3\pi/4$	0.00013	0.00023	0.00011	0.00015	0.00034	0.00009	0.00021	0.00098
$\pi/4$	$5\pi/4$	0.00013	0.00023	0.00011	0.00015	0.00034	0.00009	0.00021	0.00098
$\pi/4$	$7\pi/4$	0.00013	0.00023	0.00011	0.00015	0.00034	0.00009	0.00021	0.00098

分析表3数据可知: 在引力波沿 z 轴方向入射的简化假设下, 当固定方位角 $\phi_d = 0$, θ_d 从 $\pi/6$ 增加至 $\pi/4$ 时, 各参数的估计误差减小, 在 $\theta_d = \pi/4$ 附近达到局部最优。随后误差略有回升, 在 $\theta_d = \pi/2$ 处误差激增数个量级。之后, 在 $\theta_d > \pi/2$ 的南半球区域, 误差重新减小至较小量级, 并在 $\theta_d = 3\pi/4$ 出现另一个局部最优, 表现出与北半球近似对称的特性。而在赤道平面上 ($\theta_d = \pi/2$), 无论方位角 ϕ_d 取 0 、 $\pi/2$ 或 π , 参数估计误差均极大, 说明当引力波沿着探测平面方向入射时, 该测点的响应接近于 0 , 形成探测盲区, 由此可见单测点部署虽简单, 但无法实现全天空可靠、高精度的参数估计。

综合对比所有候选位置, 当测点位置相对于引力波入射方向的夹角 $\theta_d = \pi/4$, $\phi_d = \pi/4$ 时展现出了全局最优的综合参数估计精度, 误差达到了 10^{-3} 至 10^{-4} 量级。当引力波沿任意方向入射时, 最优位置坐标也会随之发生变化, 具体可见 4.5 节的分析。

为直观展示优选位置的优势, 图10对比了在全局最优位置 ($R, \theta_d = \pi/4, \phi_d = \pi/4$) 与一个次优位置 ($R, \theta_d = 5\pi/6, \phi_d = 0$) 下的参数后验分布。

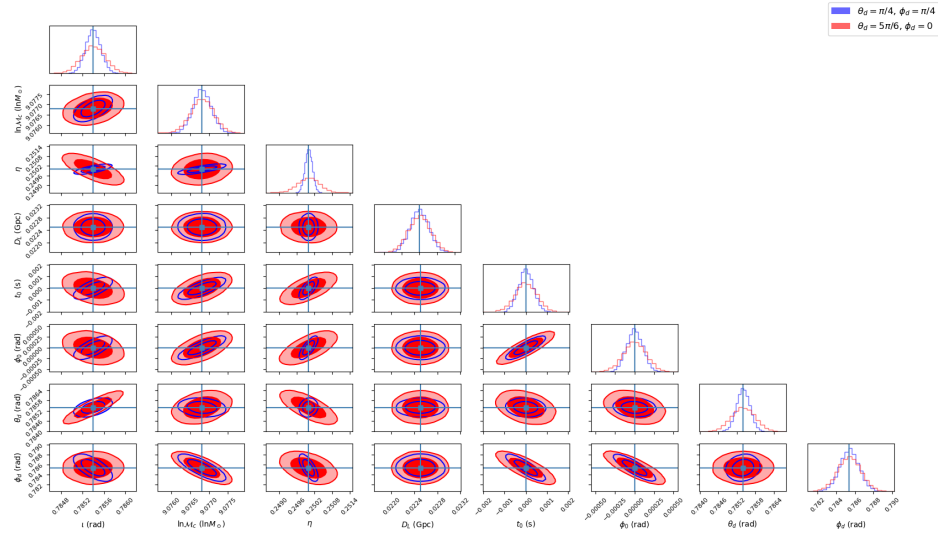


图 10 单测点不同部署位置下参数估计结果对比

图10结果显示, 在最优位置下, 参数的后验分布置信区域显著收缩, 椭圆面积更小, 表明参数估计的误差显著降低, 这可能是由于该位置的天线方向图函数在本文特定波源入射方向下响应较高所致。

4.3 双测点参数估计精度评估

为克服单测点固有的探测盲区, 本节评估双测点网络的参数估计精度。双测点网络即选取两个位置各自部署三角形阵列, 第一个测点部署在 4.2 节分析的最优位置处, 第二个测点部署在连接南北极与第一个测点的半球面上, 核心设计原则是确保两个测点的探测平面不平行, 以实现对不同方向引力波的响应互补。对多种组合构型的参数估计评估结果如表4所示。

表 4 双测点在不同位置构型下的参数估计结果

(θ_{d1}, ϕ_{d1})	(θ_{d2}, ϕ_{d2})	Δt	$\Delta \ln M_c$	$\Delta \eta$	ΔD_L	Δt_0	$\Delta \phi_0$	$\Delta \theta_d$	$\Delta \phi_d$
(rad)	(rad)	(rad)	($\ln M_\odot$)		(Gpc)	(s)	(rad)	(rad)	(rad)
$(\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/6, \pi/4)$	0.000103	0.000181	0.0000884	0.000121	0.000272	0.0000760	0.000162	0.000759
$(\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/3, \pi/4)$	0.000096	0.000167	0.0000822	0.000111	0.000246	0.0000632	0.000151	0.000705
$(\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/2, \pi/4)$	0.000118	0.000191	0.000101	0.000132	0.000282	0.0000615	0.000186	0.000873
$(\pi/4, \pi/4)$	$(2\pi/3, \pi/4)$	0.000096	0.000167	0.0000822	0.000111	0.000246	0.0000632	0.000151	0.000705
$(\pi/4, \pi/4)$	$(3\pi/4, \pi/4)$	0.0000941	0.000162	0.0000807	0.000101	0.000242	0.0000676	0.000148	0.000693
$(\pi/4, \pi/4)$	$(5\pi/6, \pi/4)$	0.000103	0.000181	0.0000884	0.000121	0.000272	0.0000760	0.000162	0.000759

由表4可知, 当双测点分别部署在相对于引力波入射方向的夹角为 $(\theta_{d1} = \pi/4, \phi_{d1} = \pi/4)$ 和 $(\theta_{d2} = 3\pi/4, \phi_{d2} = \pi/4)$ 的位置时, 展现出了全局最优的综合参数估计精度, 相较于

单测点最优结果, 双测点网络将所有参数的估计误差进一步降低了约 30%, 并且均未出现单测点情形下误差激增数个量级的异常值。这表明, 通过双测点在空间上的响应互补, 消除了单测点部署固有的探测盲区, 实现了对目标波源稳健的高精度参数估计。

4.4 三测点参数估计精度评估

为评估参数估计精度提升带来的边际效益, 本节进一步研究了三测点网络。三测点网络即选取三个位置各自部署三角形阵列, 第一个测点部署在 4.2 节分析的最优位置处, 第二个和第三个测点部署在连接南北极与第一个测点的球面上, 同时要保证三个测点位置均不同, 其参数估计结果如表 5 所示。

表 5 三测点在不同位置构型下的参数估计结果

(θ_{d1}, ϕ_{d1})	(θ_{d2}, ϕ_{d2})	(θ_{d3}, ϕ_{d3})	Δt	$\Delta \ln M_c$	$\Delta \eta$	ΔD_L	$\Delta \tau_0$	$\Delta \phi_0$	$\Delta \theta_d$	$\Delta \phi_d$
(rad)	(rad)	(rad)	(rad)	($\ln M_\odot$)		(Gpc)	(s)	(rad)	(rad)	(rad)
$(\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/6, \pi/4)$	$(\pi/4, 5\pi/4)$	0.000081	0.000143	0.000069	0.000096	0.000215	0.000060	0.000128	0.00060
$(\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/6, \pi/4)$	$(\pi/2, 5\pi/4)$	0.000086	0.000151	0.000073	0.000101	0.000226	0.000063	0.000135	0.00063
$(\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/6, \pi/4)$	$(3\pi/4, 5\pi/4)$	0.000081	0.000143	0.000069	0.000096	0.000215	0.000060	0.000128	0.00060
$(\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/3, \pi/4)$	$(\pi/4, 5\pi/4)$	0.000080	0.000139	0.000068	0.000092	0.000205	0.000052	0.000125	0.00059
$(\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/3, \pi/4)$	$(\pi/2, 5\pi/4)$	0.000083	0.000145	0.000071	0.000097	0.000215	0.000055	0.000132	0.00062
$(\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/3, \pi/4)$	$(3\pi/4, 5\pi/4)$	0.000080	0.000139	0.000068	0.000092	0.000205	0.000052	0.000125	0.00059
$(\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/2, \pi/4)$	$(\pi/4, 5\pi/4)$	0.000092	0.000148	0.000079	0.000103	0.000218	0.000047	0.000144	0.00067
$(\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/2, \pi/4)$	$(\pi/2, 5\pi/4)$	0.000110	0.000179	0.000095	0.000123	0.000265	0.000058	0.000175	0.00082
$(\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/2, \pi/4)$	$(3\pi/4, 5\pi/4)$	0.000092	0.000148	0.000079	0.000103	0.000218	0.000047	0.000144	0.00067
$(\pi/4, \pi/4)$	$(2\pi/3, \pi/4)$	$(\pi/4, 5\pi/4)$	0.000079	0.000138	0.000067	0.000091	0.000203	0.000052	0.000124	0.00058
$(\pi/4, \pi/4)$	$(2\pi/3, \pi/4)$	$(\pi/2, 5\pi/4)$	0.000083	0.000145	0.000071	0.000097	0.000215	0.000055	0.000132	0.00062
$(\pi/4, \pi/4)$	$(2\pi/3, \pi/4)$	$(3\pi/4, 5\pi/4)$	0.000079	0.000138	0.000067	0.000091	0.000203	0.000052	0.000124	0.00058
$(\pi/4, \pi/4)$	$(3\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/4, 5\pi/4)$	0.000078	0.000136	0.000066	0.000085	0.000202	0.000057	0.000123	0.00057
$(\pi/4, \pi/4)$	$(3\pi/4, \pi/4)$	$(\pi/2, 5\pi/4)$	0.000082	0.000143	0.000070	0.000089	0.000214	0.000060	0.000130	0.00061
$(\pi/4, \pi/4)$	$(3\pi/4, \pi/4)$	$(3\pi/4, 5\pi/4)$	0.000078	0.000136	0.000066	0.000085	0.000202	0.000057	0.000123	0.00057
$(\pi/4, \pi/4)$	$(5\pi/6, \pi/4)$	$(\pi/4, 5\pi/4)$	0.000110	0.000179	0.000095	0.000123	0.000265	0.000058	0.000175	0.00082
$(\pi/4, \pi/4)$	$(5\pi/6, \pi/4)$	$(\pi/2, 5\pi/4)$	0.000092	0.000148	0.000079	0.000103	0.000218	0.000047	0.000144	0.00067
$(\pi/4, \pi/4)$	$(5\pi/6, \pi/4)$	$(3\pi/4, 5\pi/4)$	0.000079	0.000138	0.000067	0.000091	0.000203	0.000052	0.000124	0.00058

由表 5 可知, 当三测点分别部署在相对于引力波入射方向的夹角为 $(\theta_{d1} = \pi/4, \phi_{d1} = \pi/4)$ 、 $(\theta_{d2} = 3\pi/4, \phi_{d2} = \pi/4)$ 和 $(\theta_{d3} = \pi/4, \phi_{d3} = 5\pi/4)$ 的位置时, 展现出了全局最优的综合参数估计精度, 其精度较双测点网络可进一步提升约 20%, 但也将显著增加成本。参考 LANGO 的成本清单^[12], 经估算, 探测器制造与测试、月表着陆与部署成本约增加 50%, 发射与运输成本约增加 60%, 前期方案研发、地面站基础设施建设等固定成本约增加 10%, 总体部署成本约增加 45%。

尽管三测点可带来约 20% 的精度提升,但相较于 45% 的成本增加,其边际效益显著递减。由于双测点网络已达到极高的参数估计精度,能够满足探测需求,因此采用双测点网络是平衡参数估计精度与部署成本的折中方案。上述分析虽基于引力波沿 z 轴方向入射的简化假设,但对于任意波源方向,该结论依然是通用的。

4.5 针对任意波源方向的探测器网络构型优化

对于分布在全天空方向的引力波源,其入射方向 (θ, ϕ) 是任意的。为将优化后的网络构型应用于实际探测任务,必须建立一套普适的方法,将针对特定方向优化得到的测点位置,映射到任意波源方向所对应的最优观测位置中。为解决这一问题,本文通过坐标系旋转,能够快速计算出任意实际波源方向下的最优位置坐标。

已知在“标准坐标系” S (定义引力波沿 z 轴入射,即 $\theta = \phi = 0$) 中,通过优化得到了测点的最优位置坐标 (θ_d, ϕ_d) 。当引力波以任意方向 (θ, ϕ) 入射时,需要找到在新观测几何下的等效最优位置坐标 (θ'_d, ϕ'_d) 。

为实现这一目标,可以将整个系统视为一个刚体旋转,核心操作是将实际波矢方向 $\mathbf{n}(\theta, \phi)$ 旋转至标准坐标系的 z 轴。这一变换可通过两次连续的坐标旋转实现^[30]:

1. 绕 z 轴旋转 $-\phi$: 使波矢 $\mathbf{n}$ 落在 $x-z$ 平面内。其旋转矩阵为:

$$R_z(-\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (30)$$

2. 绕 y 轴旋转 $-\theta$: 使位于 $x-z$ 平面内的波矢 $\mathbf{n}$ 与 z 轴重合。其旋转矩阵为:

$$R_y(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} , \quad (31)$$

总的旋转矩阵 R 为两个旋转的复合:

$$R = R_y(-\theta)R_z(-\phi) , \quad (32)$$

将测点在标准坐标系中的球坐标位置矢量 $\mathbf{r} = (\sin \theta_d \cos \phi_d, \sin \theta_d \sin \phi_d, \cos \theta_d)^T$ 乘以旋转矩阵 R , 即可得到其在新坐标系下的直角坐标 $\mathbf{r}'$:

$$\mathbf{r}' = R \cdot \mathbf{r} , \quad (33)$$

最终, 将 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ 转换回球坐标, 即可得到对应于波源方向 (θ, ϕ) 的新测点位置 (θ'_d, ϕ'_d) :

$$\theta'_d = \arccos(z'), \quad \phi'_d = \text{atan2}(y', x') . \quad (34)$$

其中, atan2 为四象限反正切函数。

5 总结与展望

本文针对 0.1~10 Hz 频段月基引力波探测的关键科学与工程问题, 系统开展了探测器灵敏度评估、参数估计精度分析以及探测器网络构型优化等工作。

首先, 建立了包含热噪声和 SQUID 读出噪声的噪声模型, 结合月球水平响应函数与天线方向图函数, 针对中等质量双黑洞并合系统波源, 计算得到信噪比高达 23.95, 验证了该方案在目标频段内探测中等质量双黑洞并合系统等波源的可行性。

随后, 采用 Fisher 信息矩阵方法, 定量比较了单测点、双测点和三测点网络构型对中等质量双黑洞并合系统这类瞬时波源的参数估计精度。结果表明, 单测点部署存在显著方向盲区, 导致某些波源参数估计误差激增数个量级; 双测点网络可完全消除盲区, 实现全天空覆盖, 并将参数估计精度较单测点最优构型提升约 30%, 已经能够满足探测需求; 三测点网络虽能进一步将精度提升约 20%, 但制造、测试、发射等部署成本显著增加。因此, 双测点网络是兼顾参数估计精度和部署成本的折中方案。

本文工作首次系统性的对月基引力波探测器网络构型进行了优化设计, 填补了相关领域在平衡参数估计精度与部署成本方面的研究空白, 为我国月基引力波探测任务的方案论证与工程实施提供了重要参考。

尽管取得了上述进展, 但本文工作仍基于若干理想化假设。首先, 在月球模型方面, 本文在月球为径向非均匀、横向均匀、表面无地形起伏的弹性对称球的假设下, 计算出月球响应函数。最近的研究表明^[31], 月表的三维地形会对其引力波响应产生额外的信号放大效应, 在某些区域可放大超过 2 倍, 从而提高探测器的灵敏度。其次, 在噪声抑制方面, 本文假设局部阵列可将月震噪声抑制至显著低于仪器本底噪声的水平。

因此, 未来研究将致力于两方面的工作: 一是引入包含月表三维地形和横向非均匀性的月球分层模型, 重新计算并修正月球响应函数, 以评估其对探测器的影响; 二是针对深月震、浅月震、热月震以及陨石撞击等月震噪声, 开发更先进的噪声抑制算法, 进一步提升方案在真实月球环境下的鲁棒性和实用性。

参考文献:

- [1] Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. Phys Rev Lett, 2016, 116: 061102.
- [2] Calloni E, LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration. Nucl Part Phys Proc, 2017, 291: 127.
- [3] Bayle J B, Bonga B, Caprini C, et al. Nat Astron, 2022, 6: 1334.
- [4] Mei J, Bai Y Z, Bao J, et al. Prog Theor Exp Phys, 2021, 2021: 05A107.
- [5] Hu W R, Wu Y L. Natl Sci Rev, 2017, 4: 685.
- [6] Chen X. npj Space Explor, 2026, 2: 1.
- [7] Nelemans G, Yungelson L R, Zwart S F P. A&A, 2001, 375: 890.
- [8] Wang B, Li B, Xiao Q, et al. Sci China Phys Mech Astron, 2025, 68: 249512.
- [9] 吴铠岚, 林翎凌, 郑永超, 等. 深空探测学报, 2023, 10: 247.
- [10] 罗子人, 白嫻, 边星, 等. 力学进展, 2013, 43: 415.
- [11] Ajith P, Seoane A P, Sedda A M, et al. J Cosmol Astropart Phys, 2025, 2025: 108.
- [12] Metzler Z, Collins C J, Paik H J, et al. Class Quantum Grav, 2022, 39: 225012.
- [13] 郑东宁. 物理学报, 2021, 70: 018502.
- [14] Paige A D, Siegler A M, Zhang A J, et al. Science, 2010, 330: 479.
- [15] Branchesi M, Falanga M, Harms J, et al. Space Sci Rev, 2023, 219: 67.
- [16] Burger J F, ter Brake H J M, Rogalla H, et al. Cryogenics, 2002, 42: 97.
- [17] Badaracco F, Harms J, Bertolini A, et al. Class Quantum Grav, 2020, 37: 195016.
- [18] Cozzumbo A, Mestichelli B, Mirabile M, et al. Philos Trans R Soc A, 2024, 382: 20230066.
- [19] 王坦, 何思译, 徐佳文. 天文学进展, 2022, 40: 556.
- [20] Van Heijningen J V, ter Brake H J M, Gerberding O, et al. J Appl Phys, 2023, 133: 24.
- [21] Ben-Menahem A. Nuovo Cimento C, 1983, 6: 49.
- [22] Yan H, Chen X, Zhang J, et al. Phys Rev D, 2024, 109: 064092.
- [23] Essick R, Vitale S, Evans M. Phys Rev D, 2017, 96: 084004.
- [24] Yan H, Chen X, Zhang J, et al. Phys Rev D, 2024, 110: 043009.
- [25] Abac A G, Abouelfettouh I, Acernese F, et al. ApJ, 2025, 995: L18.
- [26] Robson T, Cornish N J, Liu C. Class Quantum Grav, 2019, 36: 105011.
- [27] Ajith P, Babak S, Chen Y, et al. Phys Rev D, 2008, 77: 104017.
- [28] Feng W F, Wang H T, Hu X C, et al. Phys Rev D, 2019, 99: 123002.
- [29] Holger B, Piet H, Junichiro M, et al. Nature, 2004, 428: 724.
- [30] Blas D, Jenkins A C. Phys Rev D, 2022, 105: 064021.
- [31] Zhang L, Yan H, Zhang J, et al. Phys Rev D, 2026, 113: 023031.

Optimization of Lunar-Based Gravitational Wave Detector Network Configuration Based on **Parameter Estimation Accuracy**

YI Zhanghao^{1,2}, BIAN Xing^{2,3} XU Peng^{1,3,4} DENG Qiong^{3,4}

(1. School of Fundamental Physics and Mathematical Sciences, Hangzhou Institute for Advanced Study, University of Chinese Academy of Sciences, Hangzhou 310024, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China 3. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China 4. Lanzhou Center of Theoretical Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract: The lunar-based gravitational wave detection offers unique observational advantages in the 0.1–10 Hz frequency band. This paper evaluates the detection capability of a lunar-based gravitational wave detector for transient sources, specifically focusing on the coalescence of intermediate-mass black hole binaries. Based on the detector noise model and the lunar horizontal response function, the signal-to-noise ratio (SNR) is calculated to be 23.95, confirming the feasibility of detection. Subsequently, the Fisher information matrix is employed to analyze the impact of different detector network configurations (single site, dual sites, triple sites) on source localization capability. The results show that a single site has detection blind zones, while a dual-site network eliminates these blind zones, achieves full-sky coverage, and improves **parameter estimation accuracy** by approximately 30%. A triple-site network further enhances accuracy by about 20% but significantly increases deployment costs. Therefore, the dual-site configuration represents an optimal trade-off between parameter estimation accuracy and deployment costs, providing a theoretical foundation for the future deployment of lunar-based gravitational wave detectors.

Key words: lunar-based gravitational wave detection; network configuration optimization; **Parameter estimation accuracy**; fisher information matrix