

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2019.01.01

基于引力波观测数据利用质量-质量关系检验广义相对论

康泽源¹, 陈大文², 曹周键^{1,2}

(1. 北京师范大学 物理与天文学院 100875 2. 国科大杭州高等研究院 基础物理和数学科学学院 310024)

摘要: 广义相对论是现代引力物理与宇宙学的核心理论, 在弱场低速区域已经受过大量高精度实验检验。在双黑洞并合这类强场、高动态、非线性的极端时空区域对广义相对论进行检验是当前人们活跃研究的前沿科学问题。引力波作为时空弯曲的直接产物, 携带致密天体并合过程的完整动力学信息, 为强场引力理论检验提供了独一无二的途径。LIGO、Virgo、KAGRA等探测器的引力波探测事件为上述研究提供了数据支撑。本文以人类首次直接探测的引力波事件GW150914为研究对象, 基于引力波波形参数估计开展广义相对论检验。我们基于LIGO合作组广泛采用的IMRPhenomXAS波形模型, 对后牛顿展开相位系数引入参数化偏离项, 构建可量化非广义相对论效应的修正波形。进而我们利用贝叶斯推断与动态嵌套采样算法完成双黑洞质量、自旋及GR偏离参数的估计并获得参数后验概率分布。为定量判断观测数据与理论的一致性, 我们提出了临界概率的概念并通过质量-质量关系进行可视化分析。我们的分析结果表明, GW150914观测数据在一定程度上支持广义相对论。

关键词: 引力波; 质量-质量关系; 广义相对论

中图分类号: O412.1

文献标识码: A

1 引言

自2015年人类首次直接探测到引力波, 引力波天文学经历了快速发展的十年[1, 2]。相比黑洞成像观测[3], 引力波受吸积盘等物质不确定性的影响更小, 引力波因此被人们称为黑洞观测的“干净”信号[4]。由于引力波包含着宇宙中引力最强、动态最强烈时空区域的物理信息, 引力波成为人们研究广义相对论的独有工具[5]。

广义相对论是爱因斯坦在1915年建立起来的引力理论[6]。包括牛顿的万有引力理论和广义相对论, 描述引力相互作用的理论很多, 但到目前为止, 广义相对论是最为成功的引

收稿日期: 2020-01-01; 修回日期: 2020-01-01

资助项目: 国家自然科学基金 (12475046); 中央高校基本科研业务费专项资金资助

通讯作者: 曹周键, zjcao@bnu.edu.cn

力理论。一方面,在弱引力场和低速运动情况下,广义相对论自动约化成万有引力理论[7]。我们日常生活的引力现象和到目前为止的航天实践都被万有引力很好描述。另一方面,广义相对论是解释在稍强引力场条件下所有实验结果最好的理论[8, 9]。但同时我们也应该注意到关于广义相对论的两个事实。一个事实是广义相对论理论框架下存奇点定理,其从理论上表明广义相对论自身不完备。第二个事实是广义相对论同量子论存在理论上的冲突。从理论上说,这两个事实促使人们发展量子引力理论[10]。无论如何,极大可能下广义相对论不是终极的引力理论。于是,从观测和实验的角度寻找广义相对论失效的表现是非常重要的科学问题[11]。

引力波作为广义相对论研究的独有工具,已经有很多的相关工作使用引力波观测来检验广义相对论[12–15]。所有这些研究工作[16–23]都具有共性:以广义相对论为基础构建包含额外参数的拓展模型,该参数在取零时对应广义相对论,其数值大小则表征理论对广义相对论的偏离程度。当前研究仅能给出该参数在观测约束下的后验概率分布,虽所有检验结果均未发现与广义相对论的显著偏离,但尚未建立统一的定量判据,用以界定偏离广义相对论的程度是否具有统计显著性。

文献[24–26]提出了类似于脉冲双星问题研究中质量-质量关系检验广义相对论的思路[27],但尚未应用于实际引力波探测数据。文献[24–26]仅考虑了双星系统的引力波旋进阶段,本文结合近年来引力波天文学的前沿研究进展,特别是LIGO 合作组数据分析方法的最新成果,将能够表征强场引力效应的并合与铃宕阶段纳入研究范畴,有效提升了广义相对论检验结果的完整性与系统性。本文首次将文献[24–26]提出的质量-质量关系检验广义相对论思路拓展至完整的旋进-并合-铃宕信号,利用LIGO-VIRGO-KAGRA合作组的GW150914双黑洞并合事件开展广义相对论检验。

GW150914作为人类首个直接探测到的引力波事件[28]。它信噪比高,数据完整且经过长期验证校准。鉴于其突出的可靠性与权威性,它是强场检验的理想样本。本文综合参数化波形修正方法与多统计量检验策略开展研究,在保持全波形相位连续性的前提下,将基于旋近后牛顿系数的检验方法应用于实测全波形数据,通过相位拼接使并合与铃宕数据间接参与参数约束,完成GW150914事件的高精度强场引力检验,所建立的全阶段参数化检验框架可直接应用于其他双黑洞事件,为后续广义相对论检验提供可复用的分析流程与参考依据。

本文剩下部分的结构安排如下:下一章介绍IMRPhenomXAS波形模型的参数化修正方案、质量质量关系检验与临界概率判别方法,并说明数据来源与分析工具。再下一章给出对GW150914数据分析的参数估计结果,利用临界概率定量评估观测与广义相对论的一致性。最后一章总结研究结论,并从数据样本、波形模型、统计方法等方面展望后续工作。

2 方法

2.1 IMRPhenomXAS波形模型及其参数化修正方案

双致密天体并合产生的引力波向四面八方传播,我们可以被这些方向依赖关系作为立体

角的函数使用自旋加权球谐函数做展开。双致密天体并合引力波的主要辐射模式由 $(2, \pm 2)$ 模式主导。这一模式对应于质量四极辐射的主要贡献, 也是LIGO/Virgo 探测器最易观测的分量。在频域分析中, 通常将该模式的波形分解为振幅项与相位项, 以便开展广义相对论检验与参数估计。

我们把 $(2, -2)$ 阶球谐模[29]表达为形式

$$\tilde{h}_{2-2}(f, \boldsymbol{\theta}) = A(f, \boldsymbol{\theta})e^{-i\phi(f, \boldsymbol{\theta})}, \quad f > 0 \quad (1)$$

式中 f 为引力波频率, $\boldsymbol{\theta}$ 为波形参数 (包含双黑洞总质量 M 、对称质量比 η 以及两个黑洞沿轨道角动量方向的自旋 $\chi_{1,2L}$)。这里的 $\tilde{h}_{2,-2}$ 表示频域的引力波应变, $A(f, \boldsymbol{\theta})$ 对应波形振幅, $\phi(f, \boldsymbol{\theta})$ 对应波形相位。根据 $\tilde{h}_{22}$ 与 $\tilde{h}_{2-2}$ 的关系[30, 31], 我们推导出+偏振与×偏振分量 H_+ 和 $H_\times$

$$H_+ = +\sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \cdot \tilde{h}_{2-2} e^{-2i\varphi}, \quad (2)$$

$$H_\times = -i\sqrt{\frac{5}{16\pi}} \cos \vartheta \cdot \tilde{h}_{2-2} e^{-2i\varphi}. \quad (3)$$

式中 ϑ 和 φ 分别为双黑洞系统的轨道倾角与轨道方位角。

式(1)中定义的振幅与相位, 在旋进-过渡-并合-铃宕 (Inspiral-Intermediate-Merger-Ringdown) 的不同阶段, IMRPhenomXAS理论模型采用不同的假设进行建模

$$A(f, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} A_{\text{Ins}}(f_{\text{Ins}}^A, \boldsymbol{\theta}), & f_{\text{Ins}}^A \in (0, f_T^A] \\ A_{\text{Int}}(f_{\text{Int}}^A, \boldsymbol{\theta}), & f_{\text{Int}}^A \in (f_T^A, f_{\text{peak}}] \\ A_{\text{MR}}(f_{\text{MR}}^A, \boldsymbol{\theta}), & f_{\text{MR}}^A \in (f_{\text{peak}}, 0.3Mf) \end{cases}, \quad (4)$$

$$\phi(f, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \varphi_{\text{Ins}}(f_{\text{Ins}}^\varphi, \boldsymbol{\theta}), & f_{\text{Ins}}^\varphi \in (0, f_{\text{MECO}} - \delta_R] \\ \varphi_{\text{Int}}(f_{\text{Int}}^\varphi, \boldsymbol{\theta}), & f_{\text{Int}}^\varphi \in (f_{\text{MECO}} - \delta_R, f_T^A + \delta_R] \\ \varphi_{\text{MR}}(f_{\text{MR}}^\varphi, \boldsymbol{\theta}), & f_{\text{MR}}^\varphi \in (f_T^A + \delta_R, 0.3Mf) \end{cases}. \quad (5)$$

其中各特征频率的定义如下:

$$f_T^A \equiv f_{\text{MECO}} + \frac{1}{4}(f_{\text{ISCO}} - f_{\text{MECO}}), \quad (6)$$

$$\delta_R \equiv 0.03(f_T^\varphi - f_{\text{MECO}}), \quad (7)$$

$$f_T^\varphi \equiv 0.6 \left(\frac{1}{2}f_{\text{RD}} + f_{\text{ISCO}} \right), \quad (8)$$

$$f_{\text{peak}} \equiv \left| f_{\text{RD}} + f_{\text{damp}} \sigma \frac{\sqrt{1-\lambda}-1}{\lambda} \right|. \quad (9)$$

在原始IMRPhenomXAS波形模型中, MECO(Minimum Energy Circular Orbit)代表最小能量圆轨道[32], ISCO(Innermost Stable Circular Orbit)代表最内稳定圆轨道, peak 代

表铃宕阶段的峰值频率[33], $f_{\text{RD}} + if_{\text{damp}}$ 则对应最终残余黑洞的准正则模。 $0.3Mf$ 是LVK算法库套件(LALSuite) 为IMRPhenomXAS模型设定的截断频率[34, 35]。符号 f_{MECO} 、 f_{ISCO} 、 f_{RD} 、 f_{damp} 、 σ 和 λ 均为对称质量比 η 与黑洞自旋 $\chi_{1,2L}$ 的函数, 其具体形式均由唯象数值拟合确定。在本文中, 由于我们讨论超越广义相对论的情形, 这些变量不再具有上述物理意义, 仅沿用IMRPhenomXAS模型的取值。

上述公式中列出的各相位表达式如下:

$$\varphi_{\text{Ins}} = \varphi_{\text{TF2}}(Mf; \boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\eta} \left(\sigma_0 + \sigma_1 f + \frac{3}{4} \sigma_2 f^{4/3} + \frac{3}{5} \sigma_3 f^{5/3} + \frac{1}{2} \sigma_4 f^{6/3} + \frac{3}{7} \sigma_5 f^{7/3} \right), \quad (10)$$

$$\varphi_{\text{TF2}}(Mf; \boldsymbol{\theta}) = 2\pi f t_c - \varphi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{128\pi} (\pi M f)^{-5/3} \sum_{i=0}^7 \varphi_i(\boldsymbol{\theta}) (\pi M f)^{i/3}, \quad (11)$$

$$\eta \cdot \varphi'_{\text{Int}} = b_0 + b_4 f^{-4} + b_3 f^{-3} + b_2 f^{-2} + b_1 f^{-1} - \frac{4c_0 a_\varphi}{(f - f_{\text{RD}})^2 + (2f_{\text{damp}})^2}, \quad (12)$$

$$\eta \cdot \varphi'_{\text{MR}} = c_{\text{RD}} + \sum_i c_i f^{-p_i} + \frac{c_0 a_\varphi}{f_{\text{damp}}^2 + (f - f_{\text{RD}})^2}. \quad (13)$$

其中 φ_{Int} 和 φ_{MR} 由波形相对于引力波频率 f 的导数确定。系数 σ_i 、 b_i 及 c_i 均为波形参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数。这些表达式是IMRPhenomXAS模型通过唯象数值拟合得到的, 我们在本文中直接采用这些表达式。

为确保唯象模型具有物理合理性, 唯象振幅 $A(f, \boldsymbol{\theta})$ 与相位 $\varphi(f, \boldsymbol{\theta})$ 中的唯象参数需在旋进-过渡、过渡-铃宕阶段的两个拼接频率点处分别满足函数本身连续和函数一阶导数连续条件。修正后的旋进相位与后续相位在频率点 $f_{\text{MatchIN}} \equiv f_{\text{MECO}} - \delta_R$ 处光滑拼接。具体而言, 我们要求 φ_{Ins} 与 φ_{Int} 及其导数 φ'_{Ins} 与 φ'_{Int} 在 f_{MatchIN} 处的取值需分别相等。为此引入一组额外积分常数 $C_{1,\text{Int}}$ 与 $C_{2,\text{Int}}$ 来消除因旋进相位与过渡相位分别进行数值拟合而产生的失配

$$C_{2,\text{Int}} \equiv \varphi'_{\text{Ins}}(f_{\text{MatchIN}}) - \varphi'_{\text{Int}}(f_{\text{MatchIN}}), \quad (14)$$

$$C_{1,\text{Int}} = \varphi_{\text{Ins}}(f_{\text{MatchIN}}) - \varphi_{\text{Int}}(f_{\text{MatchIN}}) - C_{2,\text{Int}} f_{\text{MatchIN}}. \quad (15)$$

为了将IMRPhenomXAS 波形模型扩展至描述超越广义相对论的参数化IMRPhenomXAS 波形模型, 我们替换了PN系数中的微扰项, 具体形式如下:

$$\frac{3}{128\pi} (\pi M f)^{-5/3} \sum_{i=0}^7 \varphi_i(\boldsymbol{\theta}) (\pi M f)^{i/3} \rightarrow \sum_{j=0}^7 [\psi_j(\boldsymbol{\theta}) + \psi_{j\text{I}}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln f] \cdot f^{(j-5)/3} \quad (16)$$

其中各唯象系数 ψ_{jl} 可进一步分解为与自旋无关的 $\alpha_{jI}(\text{NS})$ 分量与与自旋相关的 $\alpha_{jI}(\boldsymbol{\theta})$ 分量, 二者共享同一个由质量决定的公共因子 $\text{Coeff}(M, \eta)$ 。式中各系数的定义如下

$$\psi_j = \text{Coeff}(M, \eta) \cdot (\alpha_j + \alpha_{jI} \cdot \ln(\pi M)), \quad (17)$$

$$\psi_{jI} = \text{Coeff}(M, \eta) \cdot \alpha_{jI}, \quad (18)$$

$$\text{Coeff}(M, \eta) = \frac{3}{128\pi} (\pi M)^{(j-5)/3}, \quad (19)$$

$$\alpha_j = \alpha_{j\text{NS}} + \alpha_{j\text{S}}, \quad (20)$$

$$\alpha_{jl} = \alpha_{jl\text{NS}} + \alpha_{jl\text{S}}. \quad (21)$$

上述记号特别关注相对于傅里叶频率的依赖关系, 显式表出 $(\pi M f)^{1/3}$ 的幂级数关系。另需注意, 部分阶数的 $\varphi_j(t)$ 除了包含频率幂次依赖外, 还存在额外的 $\ln f$ 幂次依赖。我们将这两类后牛顿系数分别记为“ l 型下标系数”(整数阶型 ψ_{jl})和“对数阶型系数”(ψ_j), 以示区分。各“ α ”系数的显式表达式可以在文献[30]中找到。

理想情况下, 所有后牛顿系数的非广义相对论偏差应被同时估计并纳入模型。然而, 在完全参数化的ppE(Parameterized post-Einsteinian, 参数化后爱因斯坦)波形模型中, 参数空间的高自由度特性以及不同PN系数之间在旋进阶段多项式结构中的相互补偿效应, 导致结果倾向于过度保守。因此, 同时进行多参数拟合往往难以获得有意义的约束。

基于上述考虑, 我们选择单次修正一个系数的策略来构建参数化的IMRPhenomXAS波形模型。具体而言, 我们从 ψ_j 和 ψ_{jl} 中选取一个参数, 令其自由变化, 而保持其他波形参数(包括总质量、质量比和黑洞自旋)固定。在本研究中, 我们选择每次仅偏离一个系数的另一个原因在于我们想构建“零假设检验”。我们的目标是让受偏离系数的后验约束尽可能严格; 若真实物理过程偏离广义相对论, 仅需存在一个非零偏差, 便足以拒绝零假设。

与广义相对论波形相比, 超越广义相对论的参数 $\psi_j(t)$ 在旋进阶段会产生一个相位偏差 $\Delta\varphi_j(t, \text{NS})$ 。针对 ψ_j 和 ψ_{jl} , 我们有

$$\Delta\varphi_{j,\text{IN}}(f) = (\psi_j - \psi_j^{\text{GR}}(M, \eta; \chi_{1L}, \chi_{2L})) f^{(j-5)/3}, \quad (22)$$

$$\Delta\varphi_{jl,\text{IN}}(f) = (\psi_{jl} - \psi_{jl}^{\text{GR}}(M, \eta; \chi_{1L}, \chi_{2L})) f^{(j-5)/3} \ln f. \quad (23)$$

它们对应的导数形式为

$$\Delta\varphi'_{j,\text{IN}}(f) = \frac{j-5}{3} (\psi_j - \psi_j^{\text{GR}}(M, \eta; \chi_{1L}, \chi_{2L})) f^{(j-8)/3}, \quad (24)$$

$$\Delta\varphi'_{jl,\text{IN}}(f) = (\psi_{jl} - \psi_{jl}^{\text{GR}}(M, \eta; \chi_{1L}, \chi_{2L})) \times \left(\frac{j-5}{3} f^{(j-8)/3} \ln f + f^{(j-8)/3} \right). \quad (25)$$

相应地, 两个积分常数 $C_{1,\text{Int}}$ 和 $C_{2,\text{Int}}$ 也得到了修正

$$\Delta C_{2,\text{Int}} = \Delta\varphi'_{j(t),\text{IN}}(f_{\text{MatchIN}}), \quad (26)$$

$$\Delta C_{1,\text{Int}} = \Delta\varphi_{j(t),\text{IN}}(f_{\text{MatchIN}}) - \Delta C_{2,\text{Int}} f_{\text{MatchIN}}. \quad (27)$$

为保证波形的连续性, 我们将上述 $\Delta\varphi_{j(l),\text{IN}}(f)$ 叠加至旋进阶段相位, 并将由 $\Delta C_{1,2,\text{Int}}$ 产生的额外累积相位差, 叠加至过渡-铃宕阶段的总相位中。由此, 我们得到修正后IMRPhenomXAS波形模型的最终相位演化形式

$$\varphi_{\text{Ins}}^{j(l)}(f) = \varphi_{\text{Ins}}^{\text{GR}}(f) + \Delta\varphi_{j(l),\text{IN}}(f), \quad (28)$$

$$\varphi_{\text{Int}}^{j(l)}(f) = \varphi_{\text{Int}}^{\text{GR}}(f) + \Delta C_{2,\text{Int}} f + \Delta C_{1,\text{Int}}, \quad (29)$$

$$\varphi_{\text{RD}}^{j(l)}(f) = \varphi_{\text{RD}}^{\text{GR}}(f) + \Delta C_{2,\text{Int}} f + \Delta C_{1,\text{Int}}. \quad (30)$$

由于超越广义相对论的参数 $\psi_{j(l)}$ 不影响振幅部分, 因此我们保留广义相对论波形的振幅行为。作为示例, 我们在图1中展示了GW150914类事件在 ψ_3 与 ψ_{5l} 修正后IMRPhenomXAS波形的相位演化。图中 δ 表示参数偏差参数

$$\delta \equiv \frac{\psi_{j(l)} - \psi_{j(l)}^{\text{GR}}}{\psi_{j(l)}^{\text{GR}}} \quad (31)$$

其中 $\delta = 0$ 的曲线对应广义相对论波形。

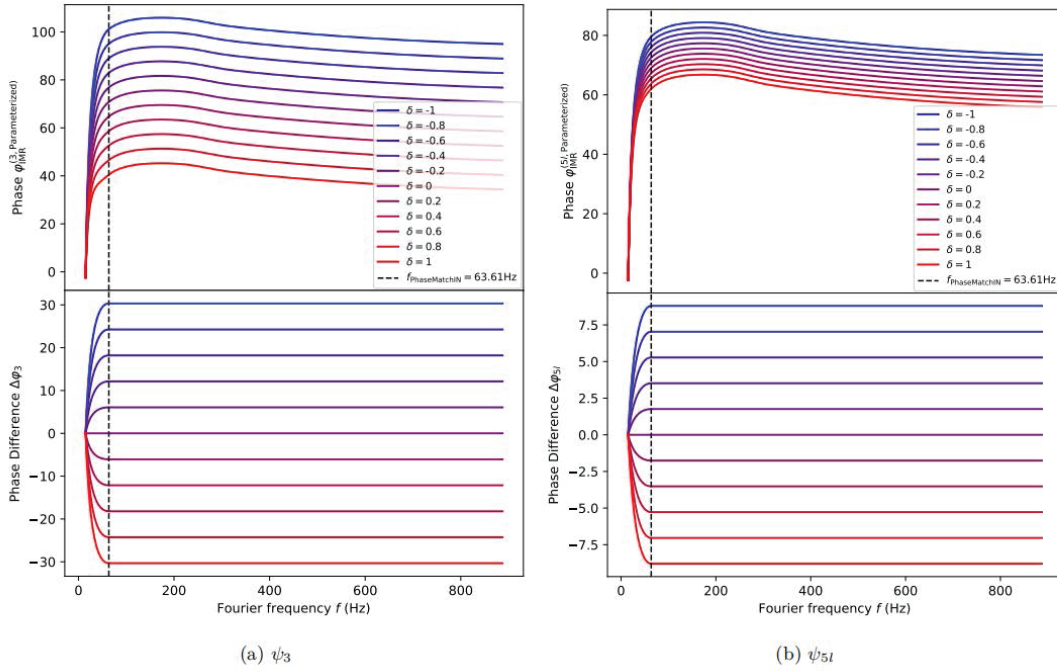


图 1 修正后IMRPhenomXAS波形模型在 ψ_3 与 ψ_{5l} 参数影响下的引力波形相位行为。参数偏差参数 $\delta = 0$ 时的曲线对应广义相对论波形。

需要说明的是, 本文引入的参数化后牛顿系数仅仅是构建质量-质量关系的中间变量, 其具体取值并非本研究的核心物理量; 本研究不针对非广义相对论参数开展系统性测量与严格上限约束, 相关结果可参考传统的参数化后爱因斯坦检验工作。本文提出的临界概率 p_c 提供了一种不依赖于具体偏离参数的统计判据, 这在一定程度上降低了对直接测量非广义相对论参数的依赖。

2.2 质量-质量关系检验与临界概率

在广义相对论框架下, 唯象系数 $\psi_i(\theta)$ 可与双黑洞系统的质量 m_1 、 m_2 和自旋参数建立关联。其中 ψ_0 、 ψ_2 、 ψ_3 、 ψ_4 、 ψ_{5l} 、 ψ_6 、 ψ_{6l} 和 ψ_7 不依赖于黑洞自旋; 而 $\psi_1 = \psi_{1l} = \psi_{2l} = \psi_{3l} = \psi_{4l} = \psi_{7l} = 0$, 因此这些参数无法实现与质量和自旋的有效关联。本文借鉴脉冲星计时广义相对论零检验思想, 选取仅与黑洞质量相关的 ψ_0 、 ψ_2 、 ψ_3 、 ψ_4 系数, 构建质量-质量分布图。核心方法为: 从双黑洞参数中选取单一 $\psi_i(\theta)$ 参数并令其自由变化, 基于参数化IMRPhenomXAS波形模型, 获取该参数与双黑洞参数的后验分布。基于广义相对论的函数关系

$$\psi_i(\theta) = \psi_i(m_1; m_2; \chi_{1L}, \chi_{2L}). \quad (32)$$

反解出

$$m_2(m_1, \psi_i) = m_2(m_1, \psi_i; \text{Median}(\chi_{1L}), \text{Median}(\chi_{2L})). \quad (33)$$

由此把 ψ_i 的概率分布转化为质量-质量平面的概率分布。上面式中的Median指后验中位数。操作上, 我们将黑洞自旋固定为后验中位数, 通过数值反解建立 m_1 、 ψ_i 与 m_2 的函数关系。后验分布内每一个 $\psi_i(\theta)$ 取值对应一条广义相对论理论下的 m_1 - m_2 曲线; 遍历全部取值区间, 即可确定广义相对论的所有可能区域。

对比 m_1 - m_2 后验分布区域与广义相对论的可能区域, 若二者无交集则广义相对论理论被排除; 若存在重叠则表明广义相对论理论与观测数据一致。由于解析反演公式难以推导, 本文采用Mathematica软件的FindRoot函数完成数值求解。

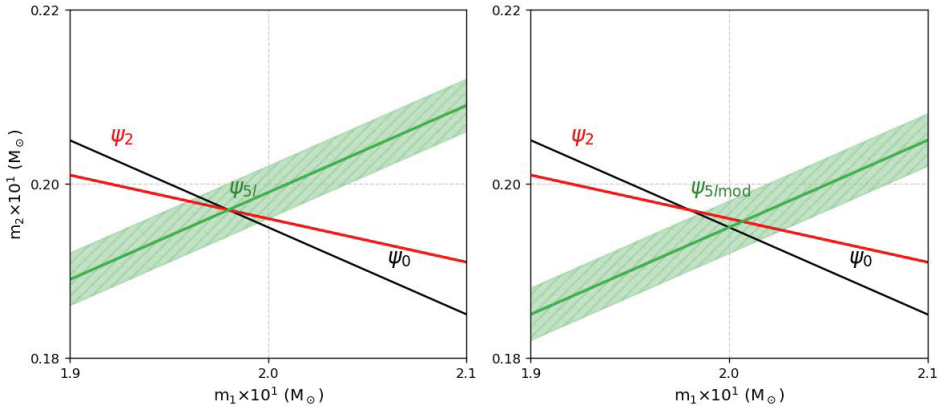


图2 m_1 - m_2 关系检验方法示意图。左图是同广义相对论完全一致的情况。右图是当 ψ_5 存在一个偏移的情况, 但在阴影对应概率意义下仍然同广义相对论一致。

图2是一张这种检验方法的示意图[26]。左图是广义相对论完全被验证时的情况。右图是人为注入一个偏差时的情况, 但在阴影对应概率意义下仍然同广义相对论一致。

为展开分析, 我们先考虑公共置信水平 p 的两个极端情形: $p = 0$ 和 $p = 1$ 。当 $p = 0$ 时, m_1 和 m_2 的置信区域退化为两条直线, $\psi_{j(t)}$ 的区域为一条等- $\psi_{j(t)}$ 曲线, 三者共点概率极

低, 默认情况下三条直线不会完美交于同一点。当 $p = 1$ 时, 各置信区域覆盖先验边界允许的全部可达区域, 必然存在三线共交点或交集区域。当置信水平 p 从 0 逐渐增大至 1 时, 必然存在一个临界置信水平 p_c , 其使得 m_1 、 m_2 、 $\psi_{j(t)}$ 三个置信区域恰好在某样本点相切的置信水平。该临界值是判定观测数据与广义相对论统计一致性的核心阈值。当置信水平高于 p_c 时, 广义相对论和观测数据具备统计一致性。

当 $p = p_c$ 时, 三个置信区域均为有限宽度区间, 边界参数 v_{left} 与 v_{right} 由中位数概率 $p = 0.5$ 对称确定, 满足:

$$v_{\text{left}} = \text{QUANTILE}\left(v, p_{\text{left}} = 0.5 - \frac{1}{2}p_c\right), \quad (34)$$

$$v_{\text{right}} = \text{QUANTILE}\left(v, p_{\text{right}} = 0.5 + \frac{1}{2}p_c\right). \quad (35)$$

每个区域包含对应参数在置信水平 $p = p_c$ 下的全部样本。当置信水平高于 p_c 时, 观测后验分布与理论区域开始交叠。 p_c 越小, 表明观测与广义相对论一致性越好。

2.3 数据与分析工具

本文使用的引力波观测数据来自引力波开放科学中心 GWOSC, 我们深入分析了 GW150914 公开数据。

本文的引力波数据分析采用多款成熟软件包及规范计算配置, 保障结果可靠。核心工具包括 LALSuite (LIGO 主导开发, 涵盖波形生成、数据预处理等全流程功能, 是领域标准工具)、基于其构建的 PyCBC 框架 (优化操作便捷性, 用于信号搜索与参数估计)。贝叶斯推断环节采用 Dynesty 软件包实现动态嵌套抽样, 可自适应分配计算资源, 提升高维参数空间抽样效率与精度。参数估计通过 PyCBC 框架的 pycbc inference 程序完成, 获取双星质量等物理参数后验分布; 修正的 IMRPhenomXAS 波形模型依托 WF4Py 库实现。计算配置上, 采样设置、参数范围及先验分布严格参考 4-OGC 标准配置文件, 结合研究目标优化关键参数先验, 兼顾规范性与针对性, 确保分析结果可靠、可比。

3 分析结果

3.1 模型参数与先验分布

pycbc_inference 的 .ini 配置文件设置参考 4-OGC 工作组提出的配置文件^[51], 涵盖各参数的先验分布、模型设置与采样器设置。具体而言, 我们设定质量比范围为 $1 < q < 10$, 啁啾质量范围为 $10M_{\odot} < \mathcal{M} < 100M_{\odot}$ 。

所有后牛顿系数使用均匀先验分布, 其分布边界设定为广义相对论参数空间 ($m_1, m_2 \in [1, 100]M_{\odot}$, $\chi_{1L}, \chi_{2L} \in [-0.99, 0.99]$) 内广义相对论预言的后牛顿系数最大/最小值的 ± 10 倍。具体先验数值如下, $-15000 < \psi_0 < 15000$, $-10000 < \psi_2, \psi_3 < 10000$, $-500 < \psi_4 < 500$, $-600 < \psi_{5l} < 600$, $-200 < \psi_6 < 200$ 和 $-20 < \psi_{6l} < 20$ 。

表 1 不同后牛顿系数下的GW150914事件参数拟合结果

PN coefficient	m_1	m_2	χ_{1L}	χ_{2L}	$\hat{\chi}_{\text{PN}}$	$\psi_{j(l)}$	GR对应的 $\psi_{j(l)}$
GR	$37.33^{+4.26}_{-3.34}$	$31.30^{+3.23}_{-4.00}$	$0.06^{+0.14}_{-0.06}$	$0.09^{+0.15}_{-0.08}$	$0.08^{+0.08}_{-0.06}$	-	-
ψ_0	$37.00^{+5.43}_{-5.383}$	$29.07^{+4.25}_{-6.33}$	$0.06^{+0.14}_{-0.05}$	$0.08^{+0.16}_{-0.07}$	$0.07^{+0.08}_{-0.05}$	$7346.82^{+494.38}_{-539.91}$	$9280.01^{+1371.42}_{-1007.92}$
ψ_2	$36.35^{+5.83}_{-4.20}$	$28.65^{+4.27}_{-6.00}$	$0.05^{+0.13}_{-0.05}$	$0.09^{+0.18}_{-0.08}$	$0.08^{+0.08}_{-0.05}$	$401.71^{+122.90}_{-144.06}$	$611.78^{+55.71}_{-45.24}$
ψ_3	$36.74^{+5.47}_{-4.26}$	$27.58^{+4.77}_{-6.17}$	$0.05^{+0.12}_{-0.04}$	$0.08^{+0.20}_{-0.07}$	$0.07^{+0.09}_{-0.05}$	$-534.78^{+100.61}_{-135.25}$	$-464.19^{+44.46}_{-51.70}$
ψ_4	$37.46^{+5.47}_{-4.26}$	$27.58^{+4.77}_{-6.17}$	$0.05^{+0.12}_{-0.04}$	$0.08^{+0.20}_{-0.07}$	$0.07^{+0.09}_{-0.05}$	$-33.15^{+54.80}_{-64.39}$	$43.98^{+3.14}_{-1.98}$
ψ_{5l}	$37.39^{+5.82}_{-4.92}$	$26.65^{+5.44}_{-6.16}$	$0.05^{+0.13}_{-0.04}$	$0.08^{+0.22}_{-0.08}$	$0.07^{+0.09}_{-0.05}$	$22.36^{+7.53}_{-6.84}$	$13.18^{+1.83}_{-2.21}$
ψ_6	$36.95^{+5.26}_{-4.46}$	$27.18^{+5.01}_{-4.74}$	$0.06^{+0.14}_{-0.06}$	$0.09^{+0.21}_{-0.09}$	$0.08^{+0.09}_{-0.06}$	$8.46^{+7.75}_{-7.84}$	$-2.67^{+1.67}_{-1.17}$
ψ_{6l}	$36.58^{+4.23}_{-5.46}$	$27.96^{+4.65}_{-5.82}$	$0.06^{+0.13}_{-0.06}$	$0.08^{+0.22}_{-0.08}$	$0.08^{+0.09}_{-0.06}$	$0.84^{+1.35}_{-1.35}$	$-1.04^{+0.03}_{-0.08}$
ψ_7	$35.93^{+6.42}_{-4.70}$	$26.44^{+4.45}_{-5.60}$	$0.08^{+0.53}_{-0.67}$	$-0.19^{+0.94}_{-0.71}$	$-0.02^{+0.12}_{-0.12}$	$4.11^{+2.03}_{-2.09}$	$1.14^{+0.52}_{-0.56}$

包含上述修改的所有PyCBC参数估计配置文件, 均已在Gitlab平台开源^①。

3.2 基于GW150914的检验结果

对 $\psi_0, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_{5l}, \psi_6, \psi_{6l}$ 分别进行参数估计, 所得质量、自旋参数与LVK合作组官方结果一致。主要参数结果如表1所示。

作为典型例子, 我们把 ψ_2 和 ψ_7 的估计结果和对应的质量-质量关系画在 m_1 、 m_2 图中, 并计算对应的临界概率 p_c 。分别如图3和图4所示。其中红色部分为 $m_1 - m_2$ 的联合分布, 紫色部分为对应 ψ 参数估计的后验分布结果在 $m_1 - m_2$ 图上的区域。

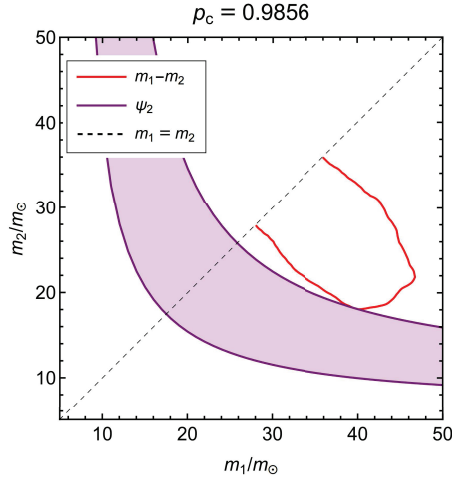


图 3 基于 ψ_2 后验分布结果的 $m_1 - m_2$ 检验图, 临界概率 $p_c = 0.9856$ 。

^①<https://gitlab.com/chendawww/parameterized-gr-test>

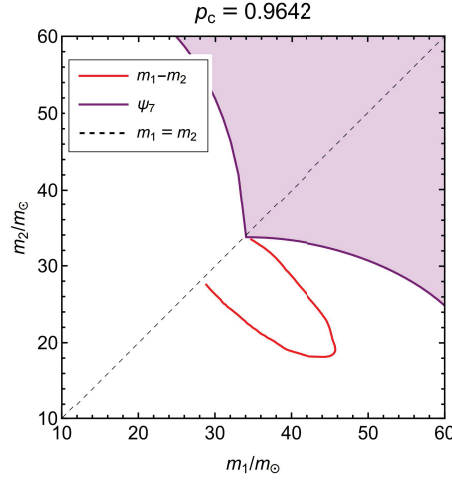


图 4 基于 ψ_7 后验分布结果的 m_1-m_2 检验图, 临界概率 $p_c = 0.9642$ 。

基于GW150914的双黑洞参数与后牛顿系数估计显示, 观测数据与广义相对论预言整体相符。黑洞质量 m_1 、 m_2 及自旋参数 χ_{1L} 、 χ_{2L} 的后验分布与广义相对论先验区间相容, 但误差区间较宽, 未形成高度集中约束。各后牛顿系数 ψ_j 、 ψ_{jl} 的测量中心值与广义相对论理论预期值有所偏移, 90%置信区间仅部分覆盖理论预期, 提示引力波相位存在可能的超越广义相对论趋势, 拟合统计量合理但未达高度拟合, 说明现有模型未能完全解释数据残余结构。临界概率 p_c 是量化数据与广义相对论一致性的核心指标, 其值越小, 数据与广义相对论一致性越强。选取三个自旋无关参数计算得到 ψ_0 对应 $p_c = 0.9999$, ψ_2 对应 $p_c = 0.9856$, ψ_7 对应 $p_c = 0.9642$, 均处于高值区间, 无法有效检验广义相对论的合理性。

综上, 本次检验不能排除广义相对论, 也无法实现对其强场形式的高精度确认; 广义相对论可大体描述双黑洞并合强场区域的引力波辐射与时空动力学, 但其完备性未得到高精度观测支持。当前数据对非广义相对论效应的约束较弱, 修正引力理论仍存在较大参数空间, 全波形(旋进-并合-铃宕)分析对相位偏离更敏感, 表明完整波形建模是提升强场检验精度的关键。

4 总结与展望

4.1 总结

本文基于IMRPhenomXAS模型构建后牛顿系数参数化修正方案得到超越广义相对论的引力波理论模型, 并提出临界概率的概念来检验广义相对论。结合贝叶斯推断与动态嵌套采样对GW150914观测数据进行了深入分析, 实现双黑洞系统参数与广义相对论偏离参数的联合估计, 针对质量-质量关系进行深入分析并得到临界概率, 完成强场广义相对论检验。本文首次将质量-质量关系检验方法扩展至全波形阶段, 形成可复现、可推广的引力波事件检

验流程。GW150914 的分析结果表明, 观测数据与广义相对论预言整体相符, 但约束精度有限, 强场区域广义相对论未被高精度证实。基于PyCBC 等工具建立的分析流程与开源代码, 可在未来同类检验研究被直接使用。

4.2 展望

基于本文理论框架与GW150914观测数据分析结果, 后续可从四方面推进: 1) 数据层面, 将分析流程扩展至O3、O4 观测期高信噪比事件, 以大样本统计降低临界概率 p_c 、提升约束精度; 2) 波形层面, 引入自旋进动效应与高阶球谐模, 开展多参数联合检验; 3) 统计层面, 系统分析先验敏感性, 结合多模型交叉验证提升结果稳健性; 4) 物理层面, 针对具体修正引力理论给出参数约束。未来可将检验方法适配第三代地基与空间引力波探测器, 建立覆盖不同尺度的强场引力检验方案。

参考文献:

- [1] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, the KAGRA Collaboration, et al. arXiv e-prints, 2025: arXiv:2508.18082
- [2] 曹周键. 大学物理, 2018, 37(2): 10
- [3] PERLICK V, TSUPKO O Y. Physics Reports, 2022, 947: 1–39. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157321003811>. Calculating black hole shadows: Review of analytical studies
- [4] 曹周键, 都志辉. 中国科学: 物理学、力学、天文学, 2017, 47(1): 18
- [5] 曹周键, 何孝凯. 中国科学: 物理学、力学、天文学, 2018, 48(7): 13
- [6] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论. [S.l.]: 微分几何入门与广义相对论, 2006
- [7] SOFFEL M H, 韩文标. 相对论天体力学和天体测量学. [S.l.]: 相对论天体力学和天体测量学, 2015
- [8] WILL C M. Living Reviews in Relativity, 2006, 9(1): 3. <https://doi.org/10.12942/lrr-2006-3>
- [9] Will C M. Theory and Experiment in Gravitational Physics. [S.l.]: [s.n.] , 2018
- [10] ZHANG C, CAO Z. Phys. Rev. Lett., 2025, 135: 261401. <https://link.aps.org/doi/10.1103/6sws-hfj7>
- [11] 殷邦晟, 曹周键. 河南师范大学学报(自然科学版), 2026, 54(3): 11
- [12] KRISHNENDU N V, OHME F. Universe, 2021, 7(12): 497
- [13] 赵文, 牛睿. 科学通报, 2024, 69(25): 3770–3784
- [14] YUNES N, SIEMENS X, YAGI K. Living Reviews in Relativity, 2025, 28(1): 3. <https://doi.org/10.1007/s41114-024-00054-9>
- [15] 张兆维, 韩文标. 天文学进展, 2025, 43(3): 472
- [16] YUNES N, PRETORIUS F. Phys. Rev. D, 2009, 80: 122003. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.122003>
- [17] LI T G F, DEL POZZO W, VITALE S, et al. Phys. Rev. D, 2012, 85: 082003. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.082003>
- [18] AGATHOS M, DEL POZZO W, LI T G F, et al. Phys. Rev. D, 2014, 89: 082001. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.082001>
- [19] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, et al. Phys. Rev. Lett., 2016, 116: 221101. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.221101>
- [20] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, et al. Phys. Rev. X, 2016, 6: 041015. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.6.041015>
- [21] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, et al. Phys. Rev. Lett., 2019, 123: 011102. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.011102>

- [22] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, et al. Phys. Rev. D, 2019, 100: 104036. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.104036>
- [23] MEHTA A K, BUONANNO A, COTESTA R, et al. Phys. Rev. D, 2023, 107: 044020. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.107.044020>
- [24] ARUN K G, IYER B R, QUSAILAH M S S, et al. Phys. Rev. D, 2006, 74: 024006
- [25] ARUN K G, IYER B R, QUSAILAH M S S, et al. Class. Quantum Grav., 2006, 23: L37–L46
- [26] MISHRA C K, ARUN K G, IYER B R, et al. Phys. Rev. D, 2010, 82: 064010
- [27] Li L F, Cao Z. General Relativity and Gravitation, 2023, 55(6): 76
- [28] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, et al. Physical Review Letters, 2016, 116(6): 061102
- [29] CAO Z, YO H J, YU J P. Phys. Rev. D, 2008, 78: 124011
- [30] PRATTEN G, HUSA S, GARCÍA-QUIRÓS C, et al. Phys. Rev. D, 2020, 102: 064001
- [31] BRÜGMANN B, GONZÁLEZ J A, HANNAM M, et al. Phys. Rev. D, 2008, 77: 024027
- [32] CABERO M, NIELSEN A B, LUNDGREN A P, et al. Phys. Rev. D, 2017, 95: 064016
- [33] KHAN S, HUSA S, HANNAM M, et al. Phys. Rev. D, 2016, 93: 044007
- [34] LIGO SCIENTIFIC K C, VIRGO. LALSuite: LIGO Scientific Collaboration Algorithm Library Suite. Free software (GPL)
- [35] IACOVELLI F. WF4Py: Gravitational wave waveform library. <https://github.com/CosmoStatGW/WF4Py>

Testing General Relativity with the Mass-Mass Relation by Gravitational Wave Data

Kang Zeyuan¹, Chen Dawen², Cao Zhoujian^{1,2}

(1. School of Physics and Astronomy, Beijing Normal University, Beijing 100875, China 2. School of
Fundamental Physics and Mathematical Sciences, Hangzhou Institute for Advanced Study, UCAS,
Hangzhou 310024, China)

Abstract: General relativity is the core theory of modern gravitational physics and cosmology. It has been extensively verified with high precision in the weak-field and low-speed regime. However, in the extreme spacetime regions characterized by strong fields, high dynamics and nonlinearity such as binary black hole mergers, the completeness of general relativity still lacks direct and high-precision observational tests. As a direct manifestation of spacetime curvature, gravitational waves carry complete dynamical information of compact binary coalescence, providing a unique way to test strong-field gravity. With the advancement of Advanced LIGO, Virgo and KAGRA detectors into the O4 observing run, a number of high signal-to-noise ratio events have offered unprecedented data support for relevant studies. This work focuses on the high signal-to-noise ratio gravitational-wave event GW150914 and performs tests of general relativity using gravitational-waveform parameter estimation. We adopt the widely used IMRPhenomXAS waveform model in gravitational-wave data

analysis. By introducing parameterized deviations to the post-Newtonian expansion phase coefficients, we construct modified waveforms that can quantify non-general relativistic effects. Based on Bayesian inference and dynamic nested sampling algorithm, we complete the full parameter estimation of astrophysical parameters including binary black hole masses and spins, as well as general relativity deviation parameters, and obtain the posterior probability distributions of all parameters. To quantitatively evaluate the consistency between observational data and theoretical predictions, we employ the critical probability p_c and visualization methods in the $m_1 - m_2$ mass plane. Results show that the observational data of GW150914 confirm general relativity to a moderate extent. Our results verify with improved precision that general relativity can still describe spacetime dynamics and gravitational-wave radiation accurately in the strong-field and highly dynamical regime of binary black hole mergers, providing high-quality independent observational evidence for strong-field general relativity tests. In the future, the parameterized testing framework can be extended to more O3 and O4 gravitational-wave events to further tighten constraints on modified gravity theories.

Key words: Gravitational Waves; Mass-Mass Relation; General Relativity