

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2026.01.15

双空洞 Λ LTB 宇宙模型的数值实现及其在 低红移超新星观测中的检验

石阳俊^{1, 2}, 杨晓峰², 刘雄伟¹, 任云亮³, 陈双楠³, 蒙建锋¹

(1. 西华师范大学 物理与天文学院, 南充 637009; 2. 河南大学 物理与电子学院, 开封 475004; 3. 新疆
大学 物理科学与技术学院, 乌鲁木齐 830017)

摘要: 建立了双空洞 Λ LTB 宇宙模型的数值计算框架, 实现了从密度剖面、时空演化和光锥积分到 Ia 型超新星似然分析的统一计算, 并与 Pantheon+SH0ES 低红移样本进行了比较。结果表明, 在示例性参数下, 该模型产生的方向膨胀率各向异性不足 1%, 其对超新星数据的拟合明显劣于平直 Λ CDM 模型, 表明该构型难以有效缓解哈勃常数张力。

关键词: 非均匀宇宙; LTB 模型; 哈勃常数危机; 数值宇宙学; Ia 型超新星

中图分类号: P145.2 **文献标识码:** A

1 引 言

近年来, 基于宇宙微波背景 (CMB) 的早期宇宙推断结果与基于晚期局域宇宙的距离阶梯法直接测量的值在哈勃常数 H_0 的大小上呈现出明显的矛盾^[1, 2]。这一差异在当前观测精度下已难以通过简单的系统误差解释, 因而引发了对标准宇宙学 Λ CDM 模型假设的重新审视^[3]。

宇宙学原理是标准宇宙学模型的基础假设之一, 该原理假定宇宙空间在足够大的尺度上是均匀且各向同性的。真实宇宙在低红移区间呈现出显著的层级结构, 如空洞、超星系团以及其它形式的复杂分布。这些非均匀结构是否会系统性地影响局域宇宙学参数的测量, 是目前宇宙学研究中一个前沿性的问题^[4]。

Lemaître–Tolman–Bondi (LTB)^[5] 模型作为爱因斯坦方程在球对称、无压尘埃条件下的精确解, 为研究径向非均匀宇宙提供了天然的理论框架。相比基于微扰的方法, LTB 模型能够在非线性层面直接刻画大尺度结构对时空几何与光传播的影响。已有研究多集中于单一空洞结构, 其参数自由度有限, 难以刻画真实宇宙中多尺度非均匀分布的复杂性; 同时,

收稿日期: 2026-01-15; 修回日期: 2026-01-15

资助项目: 国家重点研发计划 (2022SKA0110200; 2022SKA0110203); 河南大学至善特聘教授拔尖人才科研启动项目 (S25047Y)

通讯作者: 杨晓峰, xfyang@henu.edu.cn

不同工作在距离定义、光锥积分以及数值细节实现上的不一致，给结果的比较与复现带来了困难^[6]。

本文的目标并非完全解决哈勃常数危机，而是构建一套物理定义清晰、数值稳定、接口统一的双空洞 LTB 宇宙模型计算框架。通过该框架，可以系统研究多尺度径向非均匀结构对低红移观测量的影响，并为后续联合超新星、BAO (Baryon Acoustic Oscillations) 乃至其它观测探针的统计分析提供可靠基础^[7]。需要指出的是，本文引入“双空洞”构型，并不意味着真实宇宙可被严格刻画为两个理想球对称空洞；其物理动机在于，低红移宇宙的大尺度结构具有明显的层级性与多尺度性，单一尺度的空洞剖面往往难以同时描述中心欠密度、外层过渡以及更大尺度环境效应。因此，双空洞模型可视为对局域多尺度径向非均匀分布的一种现象学有效参数化，其目的在于以尽可能少的附加自由度，检验多尺度局域结构是否可能对低红移距离观测产生显著影响。本文构建该模型的目的，是在 CMB 以及其它严格的宇宙学观测约束下检验空洞模型的合理性，进而评估其在缓解哈勃常数危机问题上的潜在作用和局限性^[8-10]。

2 双空洞 LTB 宇宙模型的理论构建

2.1 Λ -LTB 度规与动力学方程

在球对称假设下，LTB 宇宙模型的时空度规可写为^[11]

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R'(t,r)^2}{1-K(r)}dr^2 + R(t,r)^2d\Omega^2, \quad (1)$$

其中 $R(t,r)$ 为面积半径，撇号表示对径向坐标 r 的偏导， $K(r)$ 为径向曲率函数。在包含宇宙学常数 Λ 的情况下，爱因斯坦方程可化简为如下动力学方程：

$$\dot{R}^2(t,r) = \frac{2M(r)}{R(t,r)} - K(r) + \frac{\Lambda}{3}R^2(t,r), \quad (2)$$

其中 $M(r)$ 为有效质量函数，点号表示对时间的偏导。

2.2 双 GBH 型密度扰动剖面

为描述多尺度径向非均匀结构，本文采用广义的 GBH (Garcia-Bellido-Haugbølle)^[12] 型密度扰动剖面。单个空洞的径向密度扰动可表示为

$$\delta_i(r) = \delta_{0,i} \frac{1 - \tanh[(r - r_{v,i})/(2\Delta r_i)]}{1 + \tanh[r_{v,i}/(2\Delta r_i)]}, \quad (3)$$

其中 $\delta_{0,i}$ 、 $r_{v,i}$ 与 Δr_i 分别表示第 i 个空洞的中心密度对比、特征尺度与过渡宽度。

不同于简单的线性叠加，本文采用非线性复合形式构造总的密度扰动：

$$1 + \delta_{\text{tot}}(r) = \prod_{i=1}^2 [1 + \delta_i(r)], \quad (4)$$

从而避免在强扰动区域出现非物理的负物质密度。这一构造从密度场的非线性叠加出发构建“非传统”的 GBH 模型^[13]，希望在控制空洞尺度的前提下探索合理的物质密度场，为利用空洞模型缓解哈勃常数危机提供更大的自由度。

2.3 从 $\Omega_M(r)$ 到 $M(r)$ 与 $K(r)$

径向依赖的物质密度参数定义为

$$\Omega_M(r) = \Omega_{M,\text{out}} [1 + \delta_{\text{tot}}(r)], \quad (5)$$

其中 $\Omega_{M,\text{out}}$ 为远离空洞区域的背景物质密度参数。在给定背景哈勃常数 H_0 与宇宙学常数密度参数 Ω_Λ 后，质量函数与曲率函数分别取为

$$M(r) = \frac{1}{2} H_0^2 \Omega_M(r) r^3, \quad K(r) = H_0^2 [\Omega_M(r) + \Omega_\Lambda - 1] r^2. \quad (6)$$

这一形式在参数范围有限且为温和扰动时在数值上与显式积分是一致的。相比传统 GBH 模型中直接参数化，本文采用从密度场出发构建 $M(r)$ 与 $K(r)$ 的方法；在弱空洞条件下，该方法与传统 GBH 参数化在物理上等价，但在数值实现上更加直接。但在数值上更直接并避免了坐标重标定的不确定性。该构造保证了在大尺度极限下模型平滑地过渡到标准 Λ CDM 宇宙^[14]。

表 1 本文用于数值演示的双空洞 Λ LTB 参数设定

参数	数值	说明
$\Omega_{M,\text{out}}$	0.315	外部背景物质密度参数
$\Omega_{\Lambda,\text{out}}$	0.685	外部背景暗能量密度参数
H_0	$67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	外部背景哈勃常数
$\delta_{0,1}$	-0.4	内层空洞中心密度对比
$r_{v,1}$	400 Mpc	内层空洞特征尺度
Δr_1	50 Mpc	内层空洞过渡宽度
$\delta_{0,2}$	-0.2	外层空洞中心密度对比
$r_{v,2}$	700 Mpc	外层空洞特征尺度
Δr_2	90 Mpc	外层空洞过渡宽度
r_{max}	1000 Mpc	径向计算域上限
z_{max}	0.30	光锥积分红移上限

需要说明的是，表 1 所列参数并非通过对 Pantheon+SH0ES 数据进行全参数拟合得到，而是为检验数值计算框架、光锥积分稳定性以及观测接口一致性而选取的一组示例性参数。该参数组的选取遵循以下原则：第一，总物质密度在整个径向区间内保持为正，以避免出现非物理负密度；第二，空洞尺度与过渡宽度处于局域大尺度结构研究中常见的数量级范围；第三，模型在大尺度极限下能够平滑过渡到背景平直 Λ CDM；第四，在本文所考虑的低红移区间内，数值积分与插值过程保持稳定。因此，本文所得结论应理解为对该示例性双空洞参数组所对应构型的个案检验，而不应直接外推为对全部双空洞参数空间的普适性结论。

然后我们讨论双空洞 ALTB 模型的数值实现细节，并说明这些数值步骤如何与后续观测计算衔接。从实现流程上看，本文的计算路径可分为六个连续步骤：首先由复合 GBH 剖面构造径向密度参数 $\Omega_M(r)$ ；随后建立质量函数 $M(r)$ 与曲率函数 $K(r)$ ；在此基础上，对每个径向网格逐壳求解面积半径 $R(t, r)$ 及其时间导数；然后构造 R 、 $\dot{R}$ 、 R' 与 $\dot{R}'$ 的二维插值器；进一步沿中心观测者的过去光锥求解 z - r - t 对应关系；最后由面积半径直接给出距离模数 $\mu(z)$ ，并计算径向与横向膨胀率 $H_{\parallel}(z)$ 与 $H_{\perp}(z)$ 。因此，我们在这里给出数值求解与插值基础，下一章则在此基础上定义光锥观测量并建立与超新星数据相匹配的理论接口。

2.4 面积半径的逐壳演化

在数值实现中，我们为了避免直接求解二维偏微分方程，对每一个径向网格点 r_j 给出独立积分时间演化方程。对于给定 r_j ，动力学方程 (2) 退化为一维常微分方程：

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\sqrt{\frac{2M(r_j)}{R(t)} - K(r_j) + \frac{\Lambda}{3}R^2(t)}, \quad (7)$$

其中负号对应向过去积分。

在数值积分失败或出现非有限解的情况下，我们采用早期物质主导阶段的解析近似

$$R(t) \propto \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad (8)$$

作为回退方案，从而显著增强整体计算的稳定性。

2.5 插值器构造与空间差分一致性

为确保后续光锥积分与观测量计算的一致性，我们在同一数值网格上同时构造以下量的插值器：

$$R(t, r), \quad \dot{R}(t, r), \quad R'(t, r), \quad \dot{R}'(t, r). \quad (9)$$

空间导数通过在径向网格上对数值解进行中心差分获得，避免在光锥积分阶段引入额外的数值噪声。所有插值均使用双线性插值，并在外部对输入参数进行裁剪，以防止不受控的对外插值行为。

3 光锥积分与观测量定义

3.1 径向光锥方程

在中心观测者假设下，径向光锥方程可写为^[11]：

$$\frac{dr}{dz} = \frac{c\sqrt{1-K(r)/r^2}}{(1+z)\dot{R}'(t, r)}, \quad \frac{dt}{dz} = -\frac{R'(t, r)}{(1+z)\dot{R}'(t, r)}. \quad (10)$$

本文采用四阶 Runge-Kutta 方法在红移空间中对上述方程进行正向积分，并对径向坐标施加下限约束，以避免数值路径回退至中心奇点区域。

需要说明的是, 非中心观测者情况下的光锥方程及光线传播行为更加复杂, 不在本文研究范围之内^[14, 15]。当观测者偏离中心的距离远小于空洞半径时 (本文保守取 $\lesssim 10$ Mpc), 中心近似仍可成立^[16]。对于更一般的理论模型有待后续工作做进一步系统研究。

3.2 距离定义与距离模数

在 LTB 时空中, 角直径距离的自然几何定义即为面积半径:

$$D_A(z) = R(t(z), r(z)). \quad (11)$$

光度距离则为

$$D_L(z) = (1+z)^2 D_A(z), \quad (12)$$

由此可直接计算 Ia 型超新星的距离模数^[16]:

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L(z)}{\text{Mpc}} \right) + 25. \quad (13)$$

该定义完全避免了类 FLRW 的经验替代公式, 确保几何与动力学的一致性。

3.3 径向与横向哈勃率

为服务于 BAO 与 Alcock–Paczynski 类型观测, Alcock–Paczynski 效应一种几何宇宙学检验^[17], 利用宇宙学距离对红移的依赖关系, 通过比较天体或结构在视线方向 (径向, 受哈勃参数 $H(z)$ 影响) 与垂直视线方向 (横向, 受角直径距离 $D_A(z)$ 影响) 的表观尺度差异, 来约束宇宙学参数^[18, 19]。根据文献定义计算径向与横向哈勃常数^[20]:

$$H_{\parallel}(z) = \frac{\dot{R}(t, r)}{R(t, r)}, \quad H_{\perp}(z) = \frac{\dot{R}(t, r)}{R(t, r)}. \quad (14)$$

所有结果在空洞模型内部以国际单位制计算, 计算结果最终统一转换为 $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ 。

4 模型的统计分析和对比

在上述背景模型与几何定义的基础上, 本文构建了一个与 Pantheon+SH0ES 数据集相兼容的超新星似然模块, 并以此检验双空洞 Λ LTB 模型在低红移哈勃图上的表现。本节介绍似然构造方法, 并展示与平直 Λ CDM 模型的数值对比结果。

4.1 数据样本与协方差矩阵

我们使用官方发布的 Pantheon+SH0ES 数据文件, 包括红移、距离模数以及对应的系统加统计协方差矩阵^[21]。首先从原始样本中筛选 $0.005 \leq z \leq 0.26$ 的超新星, 以避免极低红移处 ($z \leq 0.005$) 本动速度场主导的不确定性, 同时保证与我们改进的 LTB 模型的红移覆盖范围一致。在该区间内共保留 $N = 1084$ 个数据点, 对应自由度 $\text{ndof} = N - 1 = 1083$ (减去一个加性常数自由度)。

协方差矩阵的读入与子集化按照官方格式进行处理: 若协方差文件首行包含样本数 N , 则自动跳过; 若协方差以一维数组给出, 则在内部重塑为 $N \times N$ 方阵^[22]。对筛选后的样本,

我们对协方差矩阵做相应的行列切片, 得到子协方差矩阵 $\mathbf{C}_{\text{sub}}$, 并利用数值线性代数预先计算其逆矩阵 $\mathbf{C}_{\text{sub}}^{-1}$ 以及 $\mathbf{C}_{\text{sub}}^{-1}\mathbf{1}$, 以便在 MCMC 采样中重复调用。

4.2 解析边际化似然与模型插值

给定某一理论模型预测的距离模数 $\mu_{\text{model}}(z)$, 我们首先在观测红移点上通过线性插值得到 $\mu_{\text{model}}(z_i)$, 并定义不含加性常数的残差向量

$$d_i = \mu_{\text{obs}}(z_i) - \mu_{\text{model}}(z_i). \quad (15)$$

同时记

$$\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \quad (16)$$

为长度为 N 的全 1 列向量, 用于表示对全部超新星样本施加同一个加性常数 M 。于是, 在给定 M 时的卡方可写为

$$\chi^2(M) = (\mathbf{d} - M\mathbf{1})^T \mathbf{C}_{\text{sub}}^{-1} (\mathbf{d} - M\mathbf{1}). \quad (17)$$

将其展开后可得

$$\chi^2(M) = A - 2MB + M^2C, \quad (18)$$

其中

$$A = \mathbf{d}^T \mathbf{C}_{\text{sub}}^{-1} \mathbf{d}, \quad B = \mathbf{1}^T \mathbf{C}_{\text{sub}}^{-1} \mathbf{d}, \quad C = \mathbf{1}^T \mathbf{C}_{\text{sub}}^{-1} \mathbf{1}. \quad (19)$$

在假设 M 先验平坦的情况下, 可对其进行解析边际化。对应的极大似然估计为

$$M_{\text{best}} = \frac{B}{C}, \quad (20)$$

边际化后的有效卡方为

$$\chi_{\text{marg}}^2 = A - \frac{B^2}{C}, \quad (21)$$

对应的对数似然为

$$\ln \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \chi_{\text{marg}}^2. \quad (22)$$

该处理避免了在采样过程中将 M 作为显式自由参数单独引入, 从而提高了似然计算效率。

4.3 双空洞 Λ LTB 与平直 Λ CDM 的哈勃图比较

在双空洞 Λ LTB 模型下, 我们利用第 3、4 节所述数值管线计算出沿观测光锥的 $\mu_{\text{LTB}}(z)$, 并对其进行超新星似然拟合。作为对比, 我们构造了平直 Λ CDM 模型的距离模数

$$\mu_{\Lambda\text{CDM}}(z) = 5 \log_{10} \left[\frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_M(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}} \right] + 25, \quad (23)$$

其中 $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ 。

图 1 展示了 Pantheon+SH0ES 低红移超新星样本与上述两种模型的哈勃图对比。蓝色散点为观测距离模数及其误差条, 黄色实线为 Λ LTB 模型加上最佳边际化常数 M_{best} , 绿色虚线为平直 Λ CDM 加上其独立拟合得到的 $M_{\text{best}}^{\Lambda\text{CDM}}$ 。需要说明的是, 由于低红移哈勃图在纵轴

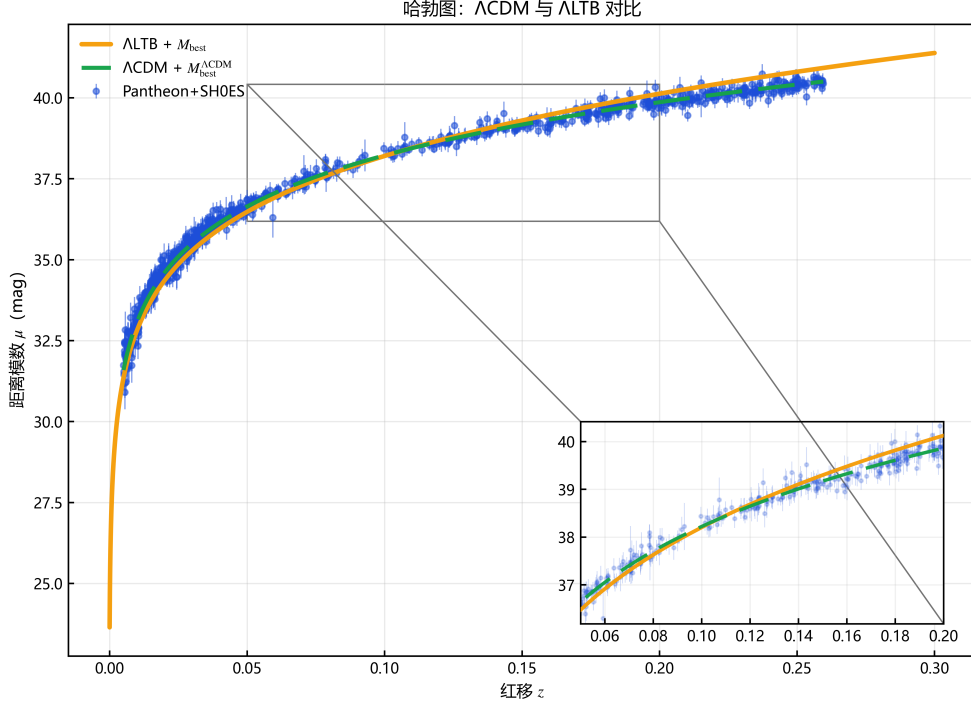


图 1 哈勃图：平直 Λ CDM 与双空洞 Λ LTB 模型对 Pantheon+SH0ES 低红移超新星样本的拟合。蓝色散点为 $0.005 \leq z \leq 0.26$ 区间的 Pantheon+SH0ES 距离模数 $\mu_{\text{obs}}(z)$ 及其观测误差；黄色实线为 Λ LTB 理论距离模数加上其最佳解析边际化常数 M_{best} ；绿色虚线为平直 Λ CDM 理论曲线加上独立得到的 $M_{\text{best}}^{\Lambda\text{CDM}}$ 。由于两条模型曲线在主图的部分区间较为接近，图中右下角给出了 $0.05 \lesssim z \lesssim 0.20$ 区间的局部放大图，以更清晰地展示二者之间的细微差异。

上的动态范围较大，两条理论曲线在主图的部分区间会出现明显的视觉重叠，因此模型间的细微差异需要结合图 2 的残差分布共同判断。

从图 1 可以看出，平直 Λ CDM 模型的理论曲线整体与超新星散点云的主分布趋势较为一致，而双空洞 Λ LTB 模型在中等红移区间 $z \sim 0.05\text{--}0.20$ 附近相对于观测数据呈现出一定的系统性偏离。这种差异在主图中已具有一定的可辨识度，在图 2 所示的残差分布中则表现得更为清晰。这表明，与平直 Λ CDM 相比，双空洞 Λ LTB 模型在该红移区间内难以更好地刻画低红移 Ia 型超新星的距离模数分布，并预示其在完整似然分析中将受到超新星数据的较强约束。

4.4 拟合结果与卡方统计量

利用上文的解析边际化似然，我们分别得到平直 Λ CDM 与双空洞 Λ LTB 模型在 Pantheon+SH0ES 低红移样本上的拟合结果（见表 2）。

两者的卡方差值为

$$\Delta\chi^2 \equiv \chi^2_{\Lambda\text{CDM}} - \chi^2_{\Lambda\text{LTB}} \simeq -1807.954. \quad (24)$$

表 2 平直 Λ CDM 与双空洞 Λ LTB 模型的拟合结果对比

模型	χ^2	自由度 (ndof)	χ^2/ndof
Λ CDM	1192.503	1083	1.101
Λ LTB	3000.457	1083	2.771

注: Λ CDM 的最佳加性常数 $M_{\text{best}}^{\Lambda\text{CDM}} \approx -0.093 \text{ mag}$, Λ LTB 的 $M_{\text{best}}^{\Lambda\text{LTB}} \approx -0.497 \text{ mag}$, 差值 $\Delta M \approx -0.40 \text{ mag}$ 。

该统计量用于衡量两种模型在同一超新星样本上的相对拟合优度。由于本文比较的两个模型使用了相同的数据、相同的协方差矩阵, 并采用了相同的加性常数解析边际化处理, 因此 $\Delta\chi^2$ 可以直接反映两者边际化后最大似然值的相对高低。若 $\Delta\chi^2 < 0$, 则说明双空洞 Λ LTB 模型的 χ^2 更大、拟合更差; 若 $\Delta\chi^2 > 0$, 则说明双空洞 Λ LTB 模型相对更受数据支持。本文得到的 $\Delta\chi^2 \approx -1807.954$ 的绝对值远大于统计涨落尺度, 表明这种差异并非随机波动所致, 而是反映了两种模型对低红移 Ia 型超新星哈勃图拟合能力的显著差别。

需要进一步强调的是, 这里的比较针对的是前文表 1 所示的固定示例性双空洞参数组, 其目的在于检验该构型在当前观测接口下的可行性, 而非对全部双空洞参数空间进行系统模型选择。

在 1083 个自由度下, 期望的 χ^2 均值约为 1083, 标准差为 $\sigma_{\chi^2} \approx \sqrt{2 \text{ndof}} \approx 46.5$ 。平直 Λ CDM 的 $\chi^2 \approx 1192.5$ 仅比期望值高出 $\sim 2.3\sigma$, 在考虑到复杂系统误差的情况下, 可视为拟合质量良好的模型; 而双空洞 Λ LTB 的 $\chi^2 \approx 3000.5$ 则相当于偏离期望值近 40σ , 在高斯近似下对应的 p 值远小于 10^{-50} , 可以视为被超新星数据强烈排斥。

此外, 两种模型在最佳加性常数上的差异为

$$\Delta M = M_{\text{best}}^{\Lambda\text{LTB}} - M_{\text{best}}^{\Lambda\text{CDM}} \approx -0.40 \text{ mag}, \quad (25)$$

对应的距离标度比为

$$\frac{d_{\text{LTB}}}{d_{\text{LCDM}}} = 10^{\Delta M/5} \approx 0.83, \quad (26)$$

即在相同红移下, Λ LTB 模型需要整体压缩 $\sim 17\%$ 的距离, 等效于提升 $\sim 20\%$ 的哈勃常数标度, 才能在一定程度上拟合观测数据。然而如此激进的距离压缩显然与精确的超新星哈勃图不相容, 这一点在残差图中得到更直观的体现。

4.5 残差分布与拟合优度比较

图 2 展示了平直 Λ CDM 与双空洞 Λ LTB 模型的残差随红移的分布。蓝色点为 Λ CDM 残差 $\mu_{\text{obs}} - \mu_{\Lambda\text{CDM}} - M_{\text{best}}^{\Lambda\text{CDM}}$, 橙色点为 Λ LTB 残差 $\mu_{\text{obs}} - \mu_{\Lambda\text{LTB}} - M_{\text{best}}^{\Lambda\text{LTB}}$, 误差条为观测不确定度。图中左上角给出了两种模型的 χ^2/ndof 以及 $\Delta\chi^2$ 数值。

可以看到, 平直 Λ CDM 的残差在整个红移范围内大致围绕零分布, 未呈现出明显的系统趋势; 而 Λ LTB 的残差则在低红移端明显偏正, 在中高红移端转为系统偏负, 表现出显著的红移依赖结构。这说明双空洞 Λ LTB 模型在本项研究选取的参数下, 并非仅在个别超新星上拟合失真, 而是在整个样本上系统性偏离观测趋势, 这说明双空洞 Λ LTB 模型在本项研究选取的参数下, 并非仅在个别超新星上拟合失真, 而是在整个样本上系统性偏离观

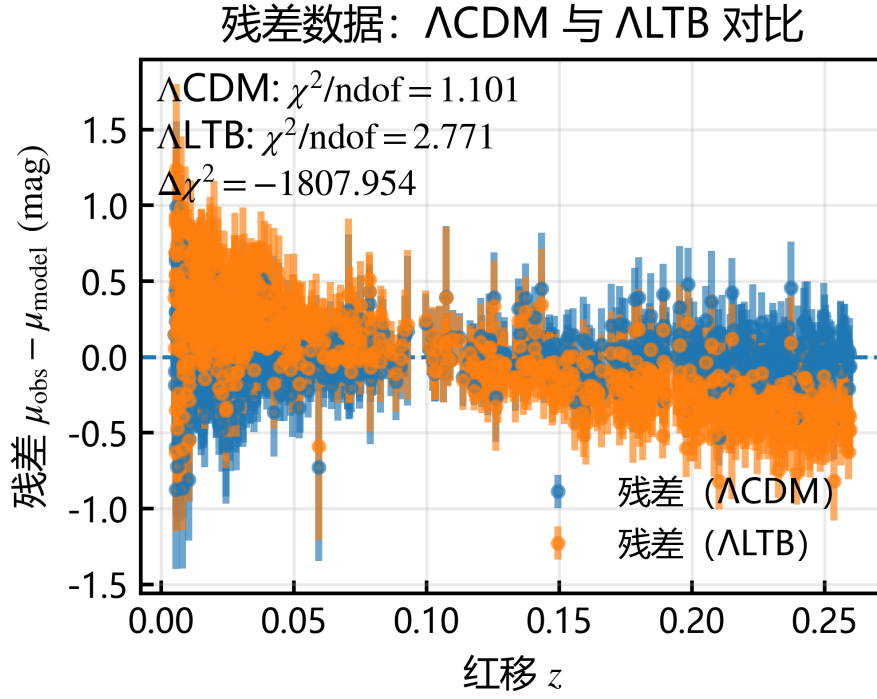


图 2 残差对比：平直 Λ CDM 与双空洞 Λ LTB 模型在 **Pantheon+SH0ES** 低红移样本上的拟合优度。蓝色点为平直 Λ CDM 的残差 $\mu_{\text{obs}} - \mu_{\Lambda\text{CDM}} - M_{\text{best}}^{\Lambda\text{CDM}}$ ，橙色点为 Λ LTB 的残差 $\mu_{\text{obs}} - \mu_{\Lambda\text{LTB}} - M_{\text{best}}$ ，误差条为观测不确定度。左上角给出 χ^2/ndof 以及 $\Delta\chi^2 = \chi_{\Lambda\text{CDM}}^2 - \chi_{\Lambda\text{LTB}}^2$ ，其中平直 Λ CDM 与 Λ LTB 分别为 1.101 与 2.771， $\Delta\chi^2 = -1807.954$ 。

测趋势，进而产生显著更大的 χ^2 ，说明该构型难以得到当前数据支持。

4.6 方向哈勃参数与各向异性比值的约束

本节讨论的方向依赖性结果基于第 4.3 节中定义的径向与横向膨胀率，

$$H_{\parallel}(z) = \frac{\dot{R}'(t, r)}{R'(t, r)}, \quad H_{\perp}(z) = \frac{\dot{R}(t, r)}{R(t, r)}. \quad (27)$$

进一步定义方向各向异性比值

$$\mathcal{A}_H(z) \equiv \frac{H_{\parallel}(z)}{H_{\perp}(z)} - 1. \quad (28)$$

其中， $\mathcal{A}_H(z) = 0$ 对应局域各向同性极限，而 $|\mathcal{A}_H(z)|$ 的大小刻画了径向与横向膨胀率之间的相对偏离程度。因而，图 3 与图 4 分别展示了双空洞 Λ LTB 模型沿观测光锥的方向相关膨胀行为，以及该方向依赖性随红移的演化。

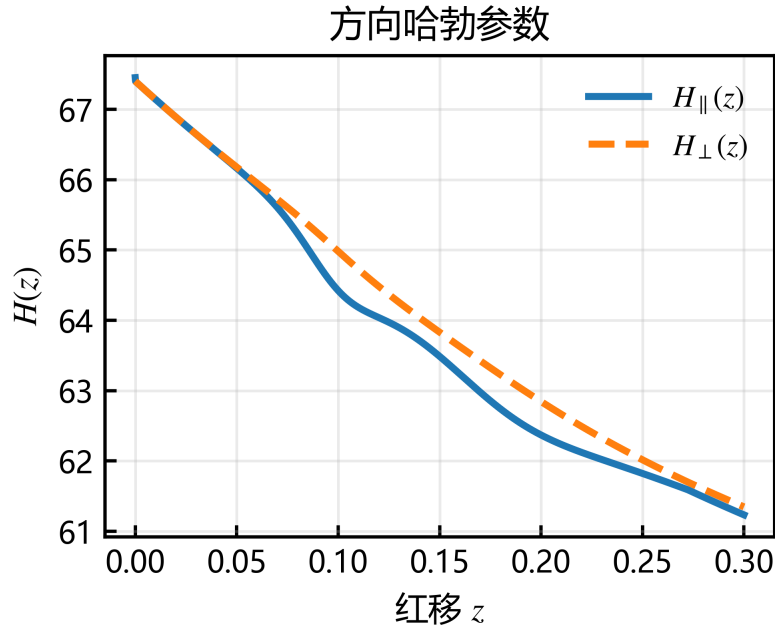


图 3 双空洞 Λ LTB 模型的方向哈勃参数 $H_{\parallel}(z)$ 与 $H_{\perp}(z)$ 。沿观测光锥给出 $0 \leq z \lesssim 0.30$ 区间内径向膨胀率 $H_{\parallel}(z)$ (实线) 和横向膨胀率 $H_{\perp}(z)$ (虚线)，单位为 $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ 。两条曲线从 $H \approx 67 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ 单调下降到约 $61 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ ，二者之间的差异保持在 $\sim 1\%$ 量级。

从图 3 与图 4 可见，本文所考察的示例性双空洞参数组在几何上仅产生了 $\lesssim 1\%$ 的方向各向异性。与哈勃常数危机所对应的典型幅度相比，这一较温和的各向异性本身不足以单独解释观测到的 H_0 差异。此外，在超新星似然约束下，该构型若试图通过约 $\sim 17\%$ 的整体距离压缩（对应约 $\sim 20\%$ 的 Hubble 标度提升）来缓解哈勃常数危机，将导致显著增大的 χ^2 。因此，对于当前所考察的参数组，双空洞 Λ LTB 模型既未能有效缓解哈勃常数危机，也难以与精确的低红移 Ia 型超新星数据保持一致。

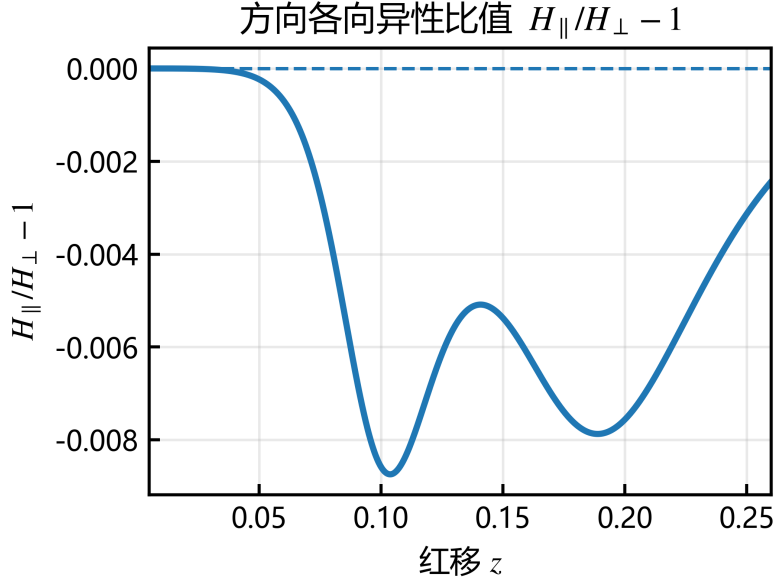


图 4 方向各向异性比值 $H_{\parallel}/H_{\perp} - 1$ 的红移演化。在双空洞 Λ LTB 模型下，给出视向膨胀率 $H_{\parallel}(z)$ 与横向膨胀率 $H_{\perp}(z)$ 的比值减一，限制在超新星分析区间 $0.005 \leq z \leq 0.26$ 。虚线表示各向同性极限 $H_{\parallel}/H_{\perp} = 1$ ，实线显示在 $z \approx 0.08-0.20$ 区间各向异性幅度约为 $|H_{\parallel}/H_{\perp} - 1| \lesssim 9 \times 10^{-3}$ 。

5 总结与展望

本文提出并实现了一套双空洞 Λ LTB 宇宙模型的数值计算框架。在球对称、无压尘埃以及包含宇宙学常数的前提下，我们基于复合 GBH 型密度剖面构造了多尺度径向非均匀结构，给出了从 $\Omega_M(r)$ 到 $M(r)$ 与 $K(r)$ 的一致性映射，并通过逐壳积分、双线性插值与光锥追踪获得了沿观测光锥的 $R(t, r)$ 、 $H_{\parallel}(z)$ 、 $H_{\perp}(z)$ 与 $\mu(z)$ 。在此基础上，我们构建了与 Pantheon+SH0ES 数据集相匹配的超新星似然模块，实现了对加性常数 M 的解析边际化，并对双空洞 Λ LTB 模型与平直 Λ CDM 模型进行了严格的拟合质量比较。

数值结果表明，对于本文所考察的示例性双空洞参数组，径向与横向膨胀率之间的方向各向异性幅度仅为 $\lesssim 1\%$ ，在几何上属于较为温和的空洞构型。然而，为了在哈勃图上接近超新星观测数据，该模型需要引入约 $\sim 17\%$ 的整体距离压缩，对应约 $\sim 20\%$ 的有效哈勃标度提升。完整的 Pantheon+SH0ES 似然分析表明，这种构型难以同时满足低红移 Ia 型超新星数据的精确约束：平直 Λ CDM 给出 $\chi^2/\text{ndof} \approx 1.10$ ，而双空洞 Λ LTB 给出 $\chi^2/\text{ndof} \approx 2.77$ ，显示该具体参数化下的双空洞 Λ LTB 模型并未得到当前数据支持。

需要强调的是，本文的结论仅适用于所考察的示例性双空洞参数组，因而应理解为对该类构型可行性的个案检验，而非对全部 Λ LTB 非均匀模型的普遍判定。LTB 模型空间具有较高的自由度，更温和的空洞深度、更复杂的径向剖面乃至与暗能量自由度的联合调节，都可能改变几何特征与观测预测。从本文结果来看，单纯依赖大尺度空洞几何方案来缓解

哈勃常数危机, 同时又不破坏精确的低红移超新星哈勃图, 难度较大。未来的研究可在本文数值框架的基础上, 系统扫描 **LTB** 参数空间, 并将超新星、**BAO**、**CMB** 以及 **kSZ**、**ISW** 等观测效应纳入统一的多探针似然, 以更全面地评估非均匀宇宙模型在哈勃常数危机中的作用。无论最终结论如何, 一个物理定义清晰、数值实现自治且观测接口统一的计算平台, 都有助于在“几何新物理”方向上开展可复现、可检验的系统研究。

参考文献:

- [1] Planck Collaboration. *A&A*, 2020, 641: A6
- [2] Riess A G, Yuan W, Macri L M, et al. *ApJL*, 2022, 934: L7
- [3] Bull P, Akrami Y, Adamek J, et al. *Phys Dark Universe*, 2016, 12: 56
- [4] Clarkson C, Ellis G, Larena J, et al. *Rep Prog Phys*, 2011, 74: 112901
- [5] Bolejko K, C  l  rier M N, Krasi  ski A. *Class Quantum Grav*, 2011, 28: 164002
- [6] Zibin J P, Moss A, Scott D. *Phys Rev Lett*, 2008, 101: 251303
- [7] Bondi H. *MNRAS*, 1947, 107: 410
- [8] Hoscheit B L, Barger A J. *ApJ*, 2018, 854: 46
- [9] Kenworthy W D, Scolnic D, Riess A. *ApJ*, 2019, 875: 145
- [10] Lukovi   V V, Haridasu B S, Vittorio N. *Found Phys*, 2018, 48: 1446
- [11] García-Bellido J, Haugb  lle T. *JCAP*, 2008, 2008: 003
- [12] Alonso D, García-Bellido J, Haugb  lle T, et al. *Phys Rev D*, 2010, 82: 123530
- [13] February S, Larena J, Smith M, et al. *MNRAS*, 2010, 405: 2231
- [14] Enqvist K, Mattsson T. *JCAP*, 2007, 2007: 019
- [15] Alnes H, Amarzguioui M. *Phys Rev D*, 2006, 74: 103520
- [16] Brout D, Scolnic D, Popovic B, et al. *ApJ*, 2022, 938: 110
- [17] Alcock C, Paczy  ski B. *Nature*, 1979, 281: 358
- [18] Sutter P M, Lavaux G, Wandelt B D, et al. *ApJ*, 2012, 761: 187
- [19] Mao Q, Berlind A A, Scherrer R J, et al. *ApJ*, 2017, 835: 160
- [20] García-Bellido J, Haugb  lle T. *JCAP*, 2009, 2009: 028
- [21] Alnes H, Amarzguioui M. *Phys Rev D*, 2007, 75: 023506
- [22] Anh H L T, Ng S C C. *Int J Mod Phys A*, 2009, 24: 3531

Numerical implementation of a double-void Λ LTB cosmology and its test with low-redshift Type Ia supernovae

Shi Yangjun^{1,2}, **Yang Xiaofeng**², **Liu Xiongwei**¹, **Ren Yunliang**³, **Chen Shuangnan**³, **Meng Jianfen**¹

(1. School of Physics and Astronomy, China West Normal University, Nanchong 637009, China; 2. School of Physics and Electronics, Henan University, Kaifeng 475004, China) 3. School of Physical Sciences and

Technology, Xinjiang University, Urumqi 830017, China

Abstract: A numerical framework is developed for a double-void Λ LTB cosmology, providing a unified treatment of the density profile, spacetime evolution, light-cone integration, and Type Ia supernova likelihood analysis. The model is tested against the low-redshift Pantheon+SH0ES sample and compared with spatially flat Λ CDM. For the illustrative parameter set considered here, the anisotropy in the directional expansion rates is below 1%, while the fit to the supernova data is significantly worse than that of flat Λ CDM, indicating that this configuration is unlikely to alleviate the Hubble tension.

Key words: inhomogeneous Universe; LTB models; Hubble tension; numerical cosmology; Type Ia supernovae