

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2016.z1.24

基于单幅离焦图像的波前恢复算法

吴之旭^{1,2,3}, 白 华^{2,3}, 崔向群^{2,3}

(1. 南昌大学 空间科学与技术研究院, 南昌 330031; 2. 中国科学院 国家天文台/南京天文光学技术研究所, 南京 210042; 3. 中国科学院 天文光学与技术重点实验室, 南京 210042)

摘要: 曲率传感器通常需要测量焦前与焦后两幅离焦图像。提出一种基于单幅离焦图像的波前恢复算法。通过计算离焦图像的光强分布与波前畸变之间的响应矩阵, 建立光强分布与像差系数方程组, 利用最小二乘法求解就可以得到波前 Zernike 系数。对昆仑暗宇宙巡天望远镜 (KDUST) 光学系统进行的模拟表明, 该算法具有硬件需求度少、测量精度高、抗噪声能力强等优点, 适用于极端环境下的波前检测。

关 键 词: 曲率传感器; 单幅离焦图像; 波前检测; 光强补偿

中图分类号: P111.33 **文献标识码:** A

1 引 言

传统的曲率传感器需要同时采集焦前焦后两幅离焦图像, 为此人们发明了多种曲率传感器的实现方式, 例如分光法、曲率光栅法、切割曲率传感器等。从 Roddier 基于衍射理论推导的单幅离焦图像的强度公式可以看出, 单幅离焦图像实际上包含了波前畸变的所有信息^[1], 因此利用从单幅离焦图像恢复出波前的方法具有理论基础。利用单幅离焦图像恢复波前的主要优点有: 首先, 星光不必将能量分配给两个 CCD, 传感器能够利用更暗的星源作为信号源; 其次, 单个 CCD 的信噪比是利用两个 CCD 微分得到信号的信噪比的 $\sqrt{2}$ 倍^[2]; 最后, 由于用单幅离焦图像恢复波前时, 只需一个离焦 CCD 就可以采集到所需要的信息, 因此系统会更加简单可靠。

目前利用单幅离焦图像进行恢复波前的方法主要有: (1) 时间积分法^[2], 该方法通过长时间的曝光来得到单幅离焦图像中的光强不变量, 然后从瞬时采集的离焦图像中扣除该光强不变量, 从而得到波前的泊松方程, 这在自适应光学中是可行的。然而, 由于主动光学的波前变化缓慢, 而且波前的变化也不完全是随机的 (例如准直误差等), 因此在主动光学中, 通过长时间曝光来测量光强不变量比较困难。(2) GS 算法和最速下降法^[3], 这两种方法都是基

资助项目: 国家自然科学基金 (11103048, 11190013, 11273038)

通讯作者: 白华, hbai@niaot.ac.cn

于衍射理论, 从而只能利用相干光源进行波前恢复。另外有利用部分偏振光源进行单幅离焦图像波前恢复^[4, 5], 自卷积函数法等^[6]。

本文首先介绍了单幅离焦图像波前恢复算法的基本原理; 然后通过对昆仑暗宇宙巡天望远镜 (KDUST) 的光学系统进行模拟, 对该算法进行验证; 最后对本文进行总结与展望。

2 理论分析

Roodier 利用衍射理论详细推导焦前离焦图像的光强分布, 其表示为 (焦后离焦图像光强分布有类似的表达式):

$$I_1(r) = I_1(r)_0 + \Delta I_1(r) \quad . \quad (1)$$

焦前离焦图像的光强表达式表明离焦图像的光强包含两部分: $I_1(r)_0$ 对应于理想入射波面在离焦面上形成的均匀分布光强, $\Delta I_1(r)$ 对应于波前起伏导致的离焦面上光强的变化。虽然式 (1) 是基于小像差近似和离焦量处于曲率传感器的线性范围内推导而来, 但是仍然可以说明单幅离焦图像的光强分布中包含了波前畸变的所有信息。由于波前的起伏会导致离焦图像的光强分布发生变化, 因此可以假定 CCD 像素中第 (i, j) 个像素光强 $I(i, j)$ 与波前畸变的 Zernike 系数之间存在函数关系 $f_{i,j}$:

$$f_{i,j}(z_1, z_2, \dots, z_n) = I(i, j) \quad . \quad (2)$$

所有像素光强与像差系数的方程组成了一个十分复杂的非线性方程组。波前恢复的过程从数学角度来看, 就是建立并求解该方程组, 即根据每个像素的光强, 利用上述方程组求解像差系数。当像差较小时, 离焦图像的光强可以用泰勒公式展开成一阶形式:

$$I(i, j) = I_0(i, j) + \frac{\partial f_{i,j}}{\partial z_1}(z_1 - z_{01}) + \dots + \frac{\partial f_{i,j}}{\partial z_n}(z_n - z_{0n}) \quad , \quad (3)$$

其中, $I_0(i, j)$ 是理想波前 (或是只含设计像差波前) 模拟得到的像素点 (i, j) 处的光强, (z_{01}, \dots, z_{0n}) 为 $I_0(i, j)$ 所对应的 Zernike 系数, $\left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f_{i,j}}{\partial z_n}\right)$ 为 CCD 中第 (i, j) 个像素的光强 $I(i, j)$ 对各阶像差的一阶偏导数。式 (3) 中的偏导数在非干涉光源情况下很难直接求得, 利用光强补偿算法可以计算该偏导数的差分近似。光强补偿算法是 Roddier 于 1993 年提出^[7], 其目的是为了提高曲率传感器在大像差情况下的恢复精度。偏导数的差分近似求解过程为: 对采集的离焦图像 I 补偿 Zernike 多项式第 k 项 z_k 的一个小增量 Δz_k (或减量), 然后将其与补偿前的图像相减, 得到差分近似的表达式:

$$\frac{\delta f_{i,j}}{\delta z_k} = \frac{I_k'(i, j) - I(i, j)}{\Delta z_k} \quad . \quad (4)$$

利用这些差分近似替代偏导数就可以列出离焦图像光强和像差系数之间的一阶线性方程组。但是, 由于像素数目很大, 导致求解的方程组维数很高 (例如像素为 200×200 时, 需要求解 40 000 阶的方程组)。实际情况中, 各像素的光强是有噪声污染的 (例如读出噪声等)。

为了降低方程组的求解维数和提高信噪比, 将离焦图像分为 M 个区域, 然后对每个区域的所有光强进行算术平均:

$$\frac{1}{N} \sum_{\Omega} I(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{\Omega} f_{i,j}(z_1, \dots, z_n) \quad (5)$$

将 $I(i, j)$ 用式 (3) 展开可得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{\Omega} I(i, j) &= \frac{1}{N} \sum_{\Omega} I_0(i, j) + \frac{1}{N} \sum_{\Omega} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial z_1} \cdot (z_1 - z_{01}) + \\ &\dots + \frac{1}{N} \sum_{\Omega} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial z_n} \cdot (z_n - z_{0n}) \quad (6) \end{aligned}$$

用差分近似式 (4) 替代上式的偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{\Omega} I(i, j) &= \frac{1}{N} \sum_{\Omega} I_0(i, j) + \frac{\frac{1}{N} \sum_{\Omega} I_1'(i, j) - \frac{1}{N} \sum_{\Omega} I(i, j)}{\Delta z_1} \cdot (z_1 - z_{01}) + \\ &\dots + \frac{\frac{1}{N} \sum_{\Omega} I_n'(i, j) - \frac{1}{N} \sum_{\Omega} I(i, j)}{\Delta z_n} \cdot (z_n - z_{0n}) \quad (7) \end{aligned}$$

将这 M 个区域的方程组成方程组:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{\Omega_1} I(i, j) &= \frac{1}{N} \sum_{\Omega_1} I_0(i, j) + \frac{\frac{1}{N} \sum_{\Omega_1} I_1'(i, j) - \frac{1}{N} \sum_{\Omega_1} I(i, j)}{\Delta z_1} \cdot (z_1 - z_{01}) + \\ &\dots + \frac{\frac{1}{N} \sum_{\Omega_1} I_n'(i, j) - \frac{1}{N} \sum_{\Omega_1} I(i, j)}{\Delta z_n} \cdot (z_n - z_{0n}) \\ &\vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{\Omega_M} I(i, j) &= \frac{1}{N} \sum_{\Omega_M} I_0(i, j) + \frac{\frac{1}{N} \sum_{\Omega_M} I_1'(i, j) - \frac{1}{N} \sum_{\Omega_M} I(i, j)}{\Delta z_1} \cdot (z_1 - z_{01}) + \\ &\dots + \frac{\frac{1}{N} \sum_{\Omega_M} I_n'(i, j) - \frac{1}{N} \sum_{\Omega_M} I(i, j)}{\Delta z_n} \cdot (z_n - z_{0n}) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

令:

$$\Delta z = \begin{bmatrix} z_1 - z_{01} \\ \vdots \\ z_1 - z_{01} \end{bmatrix}, \quad \Delta I = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{\Omega_1} I(i, j) - \frac{1}{N} \sum_{\Omega_1} I_0(i, j) \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{\Omega_M} I(i, j) - \frac{1}{N} \sum_{\Omega_M} I_0(i, j) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{\Omega_1} I_k'(i, j) - \frac{1}{N} \sum_{\Omega_1} I(i, j) & \frac{1}{N} \sum_{\Omega_1} I_1'(i, j) - \frac{1}{N} \sum_{\Omega_1} I(i, j) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{\Omega_M} I_k'(i, j) - \frac{1}{N} \sum_{\Omega_M} I(i, j) & \frac{1}{N} \sum_{\Omega_M} I_n'(i, j) - \frac{1}{N} \sum_{\Omega_M} I(i, j) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

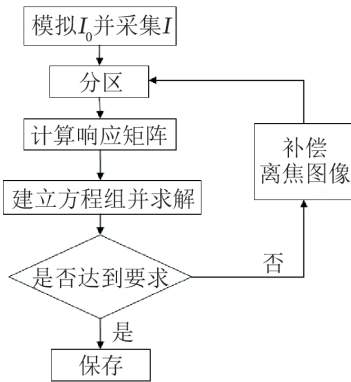


图1 基于光强补偿算法的单幅离焦图像波前恢复过程

由于矩阵 \mathbf{A} 反映了波前畸变信息对离焦图像的光强分布产生的影响, 因此称 \mathbf{A} 为响应矩阵, 这样线性方程组的矩阵形式为:

$$\Delta I = \mathbf{A} \Delta z. \quad (11)$$

求解式 (9) 最常用的方法是最小二乘法, 其解为:

$$\Delta z = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \Delta I. \quad (12)$$

由于式 (9) 是在小像差情况下的一阶展开, 因此当像差较大时, 通过求解线性方程组 (9) 所得到的结果中包含了非线性误差。为了降低非线性误差, 可通过图 1 进行迭代, 以提高求解精度。

3 模拟结果

2.16 m 天文望远镜的中凹椭球面镜 C 被命名为苏俞周中继镜 (SYZ relay mirror)^[8], 袁祥岩研究员基于 SYZ 中继镜折轴系统设计了南极 2.5 m 望远镜 KDUST (如图 2 所示)。本文以 KDUST 光学系统作为模拟系统, 模拟的参数为: 离焦量为 15 mm, 波长为 630 nm, 遮拦比为 0.215。焦面 CCD 大小为 2 mm, 每个像素大小为 10 μm , 像素为 200, 模拟采集的是中心视场的离焦图像。

图 3 是在迭代过程中, 中心视场离焦图像的变化过程。由于轴上设计像差较小, 因此图 3 a) 的光强分布较为均匀。从图 3 c) 可以看出, 像差导致离焦图像光强分布变化较为明显。迭代过程中, 利用求解的像差系数对采集的离焦图像进行补偿, 然后与模拟的参考离焦图像

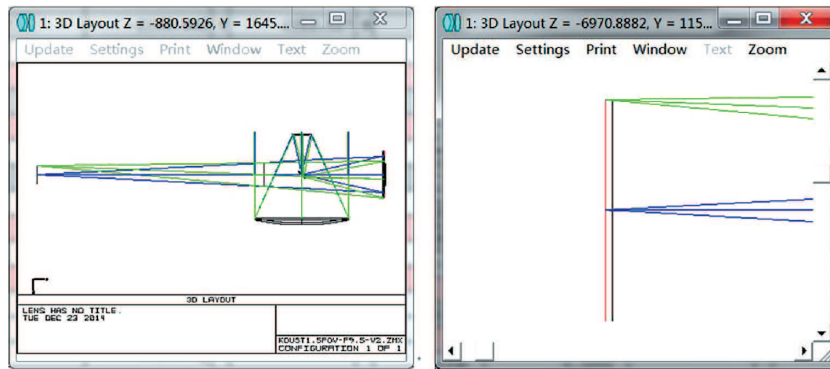
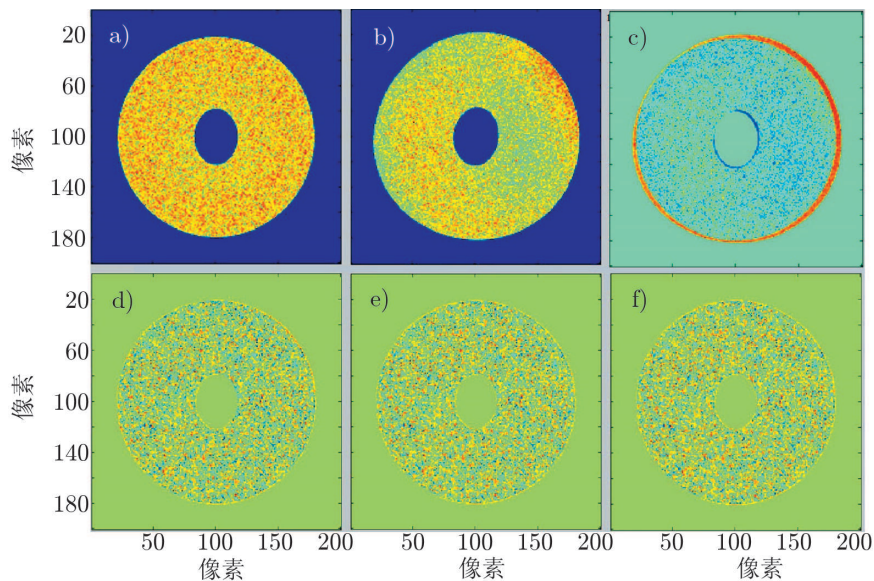


图 2 KDUST 光学系统及其离焦面

进行比较。从图 3 d) 至 f) 可以看出, 补偿后的离焦图像与参考离焦图像之间的差异越来越小, 迭代 3 次后, 他们之间的差异基本为 0。迭代过程中的恢复结果见表 1, 其中第 1 列为出瞳波前的实际像差, 第 2 列为系统的设计像差, 第 3 列到第 5 列为每次迭代求解的 Zernike 系数。由于折轴会导致坐标的旋转, 因此恢复出的波前系数与入瞳面的波前系数在特定项会正负相反。去除坐标旋转变化的系数符号的影响, 迭代 3 次后恢复结果与真实 Zernike 系数符合得很好。实际波前和拟合波前的 RMS 值为 11.67 nm, 小于波长的 1/20。



注: 其中 a) 为包含 KDUST 轴上设计像差的离焦图像; b) 为 KDUST 加入像差后采集的离焦图像; c) 是 a) 和 b) 的差值; d) — f) 是迭代过程中, 用当次迭代得到的 Zernike 系数补偿图 b), 并将其与 a) 相减。

图 3 中心视场离焦图像及其在波前恢复过程中的变化

表 1 KDUST 光学系统中心视场模拟结果

Z_{terms}	$Z(\lambda)$	$Z_{\text{design}}(\lambda)$	$Z_{\text{add}}(\lambda)$	$iter_1(\lambda)$	$iter_2(\lambda)$	$iter_3(\lambda)$
Z_4	-0.398 883 25	-0.046 154 82	-0.352 728 43	-0.350 4	-0.357 2	-0.357 7
Z_5	0.292 284 04	0	0.292 284 04	0.274 9	0.288 4	0.292 5
Z_6	-0.094 666 67	-0.000 001 27	-0.094 665 40	-0.080 1	-0.091 2	-0.092 4
Z_7	-0.000 001 67	-0.000 001 74	0.000 000 07	0.005 1	0.006 9	0.007 2
Z_8	0.102 774 43	0	0.102 774 43	-0.113 1	-0.109 5	-0.108 6
Z_9	-0.006 728 10	-0.000 000 01	-0.006 728 09	0.013 9	0.017 6	0.017
Z_{10}	-0.045 514 37	0	-0.045 514 37	0.054	0.055	0.054 5
Z_{11}	0.020 659 98	0.020 659 55	0.000 000 43	-0.002 6	-0.001 6	-0.001 4
Z_{12}	0.000 004 92	0.000 004 68	0.000 000 24	-0.001 9	-0.001 3	-0.001 1
Z_{13}	-0.026 240 94	0	-0.026 240 94	-0.024 6	-0.024 4	-0.025 2
Z_{14}	0.000 003 49	0.000 003 57	-0.000 000 08	-0.001 2	0.001 6	0.001 5
Z_{15}	-0.000 000 16	0	-0.000 000 16	-0.003 5	-0.003	-0.003 2
Z_{16}	-0.032 888 43	0	-0.032 888 43	0.035 5	0.035	0.035 2
Z_{17}	0.000 002 93	0.000 002 79	0.000 000 14	-0.001 8	-0.002 4	-0.002 6
Z_{18}	-0.000 000 04	0	-0.000 000 04	-0.002 7	-0.001 8	-0.001 8
Z_{19}	0.016 831 70	0	0.016 831 70	-0.018 8	-0.018 9	-0.018 8
Z_{20}	0.000 000 06	0	0.000 000 06	0.000 5	0.000 2	-0.000 2
Z_{21}	0	0	0	0.001 2	0.001 3	0.001 5
Z_{22}	-0.002 399 18	-0.002 399 14	-0.000 000 04	0.001 4	0.001 4	0.001 2

4 结 论

相比于传统的曲率波前传感器，从单幅离焦图像恢复出波前更加简单。本文提出一种新的基于单幅离焦图像的波前恢复算法，并从理论上分析该算法的基本原理，通过对 KDUST 的光学系统的模拟表明，该算法具有测量精度高，抗噪声能力强等优点。

参考文献:

- [1] Roddier F. NOAO advanced development program, 1987: 87
- [2] Hickson P. JOSA A, 1994, 11(5): 1667
- [3] Fienup J R, Marron J C, Schulz T J, et al. Applied optics, 1993, 32(10): 1747
- [4] Goldfain E. SPIE, 1998, 3430: 114
- [5] Xu S, Zhang C, Wei H, et al. Journal of Optics, 2014, 16(7): 072001
- [6] Morgan A J, Martin A V, et al. Ultramicroscopy, 2011, 111(9): 1455
- [7] Roddier C, Roddier F. JOSA A, 1993, 10(11): 2277
- [8] 苏定强, 周必方, 俞新木. 中国科学(A 辑), 1989 (11): 1187

Wave-front Sensing by Single Defocused Image

WU Zhi-xu^{1,2,3}, BAI Hua^{2,3}, CUI Xiang-qun^{2,3}

(1. Nanchang University, Institute of Space Science and Technology, Nanchang 330031; 2. National Astronomical Observatories / Nanjing Institute of Astronomical Optics and Technology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210042; 3. Key Laboratory of Astronomical Optics and Technology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210042)

Abstract: Curvature wave-front sensor usually need collect the in-focus image and the ex-focus image. This paper proposed a new wave-front recovery algorithm which based on a single defocused image. This algorithm can recovery the wave-front by calculating the response matrix between the intensity distribution of the defocused image and the wave-front error, then constructing the equation sets of the Zernike coefficients and solving this equation sets by least square method. The simulation of the KDUST optical system showed that this algorithm have the advantages of less hardware, hight precision, robust to the noise. Thus it is suitable for the wave-front sensing in the extreme environment.

Key words: curvature wave-front sensor; single defocused image; wave-front sensing; intensity compensation