第 32 卷　第 1 期
2014 年 1 月

天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol. 32,　No. 1
Jan., 2014

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2014.01.06

相对论天文参考系的回顾与展望

韩文标 [1]，陶金河 [1]，马　维 [2]

(1. 中国科学院 上海天文台，上海 200030；　2. 同济大学经济与管理学院，上海 200092)

摘要：国际天文联合会 (IAU) 在 1991 年和 2000 年分别通过了关于相对论天文参考系的重要决议。特别是 2000 年的决议，以两个互相等价的相对论 N 体多参考系理论：Brumberg-Kopeikin 体系和 Damour-Soffel-Xu 体系为基础，构造了严格且自洽的一阶后牛顿 (1PN) 的局部参考系和全局参考系，并给出了相应的坐标变换规则。IAU2000 决议发表后的 10 多年里，已经开始应用在一些高精度的天体测量数据处理模型中，但是其工程化应用还没有得到广泛实现，特别是目前为止我国没有将其应用到具体的天文观测或者空间探测计划中。因此有必要对 IAU 的相对论天文参考系理论做一个系统的解读。首先介绍了 IAU 在 1991 年给出的一个简单的相对论参考系决议；随后在第 3 章和第 4 章详细讨论了 Brumberg-Kopeikin 理论和 Damour-Soffel-Xu 体系；接着，详细给出了 IAU2000 年大会关于相对论参考系的决议内容；最后，讨论了 IAU2000 决议的工程化应用、近 10 多年来的理论发展以及对未来的展望。

关　键　词：天体力学；天体测量学；广义相对论；天文参考系

中图分类号：P129, P132　　　　**文献标识码**：A

1　引　言

20 世纪 60 年代以前，天体测量主要是地面方位观测，精度低于 0.01″，观测资料处理的理论框架是牛顿力学和牛顿光学。随着观测手段和观测精度的快速发展，特别是近 30 年来，天体测量技术达到或者即将达到的精度为 [1, 2]：雷达对行星的测距精度——米级；激光测月——毫米级 [3]；毫秒脉冲星—— 50 ∼ 100 ns[4]；原子钟比对——纳秒级 [5]；激光测卫——毫米级 [6−8]；VLBI 技术定基线、极移——毫米级，VLBI 技术定日长—— 10 μs 左右，VLBI 技术定相对角距——毫角秒 [9]；Gaia 计划——可达微角秒级 [10]。

在当前高精度天体测量的精度水平下，数据归算必须纳入相对论框架。例如，利用地面站的无线电跟踪技术对航天器进行跟踪测量时，高精度测控和导航系统都需要考虑太阳系天

收稿日期：2013-09-02；　修回日期：2013-11-25

资助项目：国家自然科学基金 (11273045，11273044)

通讯作者：韩文标，wbhan@shao.ac.cn

体引起的引力时延，其量级一般可以达到几十微秒。特别是当光线掠过太阳表面所引起的引力时延会有几百微秒。时间的定义和同步，参考系的定义和维持，太阳系天体历表的编制，雷达和激光测距，VLBI 观测，全球导航系统等任务的数据处理都必须采纳相对论性的引力理论作为理论框架。

从实用的角度看，时间、坐标、速度、距离、轨道根数等常用的量在广义相对论里是与坐标系的选择密切相关的。不同的研究或数据处理小组，如果采用不同的坐标系和度规来处理数据，得到的结果可能无法进行比较和交流。为此，从 20 世纪 70 年代开始，国际天文学联合会 (IAU，International Astronomical Union) 的基本天文学部门组织了多个工作小组，研究和制定在广义相对论框架里高精度天体测量资料处理所需要的时空度规和时间、坐标、质量、多极矩，及有关天文常数的定义和规范。在此基础上自 1976 年以来通过了一系列的关于时空参考系相对论部分的决议：

(1) 1976 年在法国格勒诺布尔举行的第 16 届 IAU 大会发表的《建议 5》；

(2) 1979 年在加拿大蒙特利尔举行的第 17 届 IAU 大会发表的《决议 5》；

(3) 1991 年在阿根廷布宜诺斯艾利斯举行的第 21 届 IAU 大会发表的《决议 A4》；

(4) 1997 年在日本东京举行的第 23 届 IAU 大会发表的《决议 B6》；

(5) 2000 年在英国曼彻斯特举行的第 24 届 IAU 大会发表的《决议 B1.3-1.5》、《决议 B1.9》；

(6) 2006 年在捷克布拉格举行的第 26 届 IAU 大会发表的《决议 1-3》。

其中，最重要的关于相对论天文参考系的决议是在 1991 年和 2000 年做出的。

天体测量本质上是在一定的时空背景下进行的。在牛顿力学框架，时空平直，时间处处均匀，不同参考系之间的坐标变换是简单的伽利略变换。但是在广义相对论框架下，天体测量是在弯曲时空中进行的，参考系之间的变换关系也更加复杂，依赖于背景度规。值得说明的是，本文中的“参考系”(Reference systems)，沿用 IAU2000 年决议中的概念；因此“参考系”并非具体的参考架 (Reference frames，比如星表) 的实现和维持，而是一个抽象的数学定义。所谓的相对论天文参考系区别于牛顿力学时空概念，核心是确定天文观测所在的时空区域引力场的度规。由于我们的太阳系是由太阳加多个行星及其卫星等构成的一个 N 体引力系统，因此这是一个多参考系的相对论多体问题。为了描述太阳和行星绕太阳系质心的运动，需要一个全局的太阳系质心参考系。另一方面，需要建立太阳和行星各自的局部参考系，在其中可更合理地描述各自的自转、形状以及质量可忽略的卫星的运动。或者说，需要给出一个能够覆盖太阳系时空区域的度规张量场，以及一个地球 (或者其他行星) 局部时空区域的度规张量场。这两个参考系可以互相转换，在其中的观测量也能互相转换。

相对论天文参考系的核心内容就是给出这样的度规。这涉及到两方面的内容：一是相对论框架下质量多极矩和自旋多极矩的定义；二是相对论 N 体产生的引力场的构建。即使在牛顿力学情况下，现在的天文测量精度以及空间探测的要求也需要考虑地球甚至其他行星的质量多极矩。天文学家一直使用球谐展开来描述质量多极矩。但是在广义相对论框架下，质量多极矩的定义相当复杂，目前得到学术界广泛认可的是 Blanchet 和 Damour 在 1989

年给出的质量多极矩定义，称为 B-D 多极矩。关于 N 体系统的引力场构建，因为爱因斯坦场方程是非线性的，不能简单地像牛顿力学一样将 N 个天体的引力势在场点线性叠加。相对论 N 体最具代表性的研究成果是 Brumberg 和 Kopeikin 的体系 (BK 体系)[11–13]，以及 Damour-Soffel-Xu 的体系 (DSX 体系)[14–17]。它们都是多参考系相对论多体问题的 1PN 体系。两者等价，构成了 IAU2000 年相对论多参考系决议 [18] 的基础。

本文组织如下：第 2 章介绍 IAU 1991 年做出的关于相对论时空参考系决议的内容；第 3 章介绍 Brumberg-Kopeikin 的参考系理论；第 4 章较详细地讨论 DSX 体系，包括 B-D 多极矩以及相关的讨论；第 5 章给出 IAU2000 年决议的主要内容；最后，我们就 IAU2000 决议工程化、相对论天文参考系的研究工作进行讨论和展望。在文末的附录中，我们统一说明了本文采用的符号和约定。

2　IAU 1991 年关于相对论参考系的决议

在 20 世纪 60 年代之前，尽管人们认识到广义相对论是一个伟大的理论，且已有水星近日点进动和光线偏折这两个经典实验的验证，但是大多数人仍然认为，它并没有太多实际的用处。这种情况直到 1959 年 Pound-Rebka 精确的引力红移实验后才开始慢慢改变 [19]。从 20 世纪 60 年代到 70 年代中期，广义相对论进入了所谓的“黄金年代”。一方面，理论物理和天体物理学家开始把广义相对论引入他们的研究领域之中；另一方面，Shapiro 时延的提出[20]和验证 [21]、VLBI 技术以及 GPS 全球定位系统的出现和发展使得传统的天文学家也意识到广义相对论在天体测量等领域的作用。在这个大的背景下，从 1976 年开始，IAU 就在讨论基本天文参考系所涉及的相对论部分的相关问题。经过 10 多年的讨论，IAU1991 年决议第一次给出了由一组质量体构成的引力系统 (比如太阳系) 的质心坐标系下的度规形式 [22]：

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \dfrac{2U(t,\boldsymbol{x})}{c^2} + O(4) \quad , \\ g_{0i} = O(3) \quad , \\ g_{ij} = \delta_{ij}\left(1 + \dfrac{2U(t,\boldsymbol{x})}{c^2}\right) + O(4) \quad , \end{cases} \tag{1}$$

其中 U 是由该组质量体内所有引力体在场点 $(t,\boldsymbol{x})$ 产生的牛顿引力势以及这组质量体之外的引力体在该点的潮汐势之和。U 的代数符号取正，满足泊松方程，

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho \quad . \tag{2}$$

由这个定义可以看出，IAU1991 决议显式地引入了广义相对论作为时空参考系定义的理论基础。显然，式 (1) 中所有的度规分量，只给出了最低阶相对论近似 (一阶后牛顿)。决议认为这已经满足了当时的观测精度，并指出，使用者可以根据需要增加高阶项。如果大部分观测需求更高精度的度规，IAU 会相应增加高阶项。决议认为，增加高阶项不会改变 1991 年决议关于相对论部分的其他内容。后来的发展证明，这有点过于乐观。更高精度的相对论参考

系采用的是不同的相对论 N 体理论体系，决议内容很多部分都需要改动。

决议也认识到，时空不能由单一的坐标系覆盖，因为选择一个合适的坐标系，会大大简化问题的研究。比如地球卫星运动理论采用地心坐标系远比太阳系质心坐标系方便。他们认为，式 (1) 同时也能够描述地心参考系的度规张量，只要用合适的函数来替代其中的引力势 U 即可。另外，参考系的原点和坐标轴指向也被定义：太阳系质心坐标系和地心坐标系的原点显然分别在太阳系质心和地球质心处，两者相对于遥远的射电源都没有整体旋转。时间坐标则由放置在大地水准面附近的原子钟来定义。所有坐标系中的时空基本物理单位必须是 SI 秒和 SI 米，这样真空中的光速值为 $c = 299\,792\,458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。太阳系质心坐标时 TCB 和地心坐标时 TCG 之间的关系为，

$$TCB - TCG = \frac{1}{c^2}\left[\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{E}}^2}{2} + U_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})\right)\mathrm{d}t + r_{\mathrm{E}}^i \upsilon_{\mathrm{E}}^i\right] + O(4) \quad , \tag{3}$$

其中，x_{E}^i，υ_{E}^i 是太阳系质心坐标系中描述的地球质心位置和速度，$r_{\mathrm{E}}^i = x^i - x_{\mathrm{E}}^i$，而 x^i 是观测者的 BCRS 坐标，$U_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})$ 是除地球外太阳系所有引力体在地球质心处的引力势。

地球时 (TT, 由大地水准面上的原子钟实现的坐标时) 和国际原子时 (TAI，也是一种坐标时) 差一个常数 32.184 s，具体为 TAI 读数 1977 年 1 月 1 日 0 时 0 分 0 秒 (相应的 JD=2 443 144.5 儒略日) 时，TT 读数为 1977 年 1 月 1 日 0 时 0 分 32.184 秒。也就是说，

$$TT = TAI + 32.184\ \mathrm{s} \quad . \tag{4}$$

而 TCG 和 TT 的关系给定如下，

$$TCG - TT = L_{\mathrm{G}} \times (\mathrm{JD} - 2\,443\,144.5) \times 86\,400 \quad , \tag{5}$$

这里 JD 是以儒略日为单位的 TAI 时间。而老的太阳系质心力学时 TDB 考虑到使用的连续性，也给出相应的转换关系 (单位为秒)，

$$TCB - TDB = L_{\mathrm{B}} \times (\mathrm{JD} - 2\,443\,144.5) \times 86\,400 \quad . \tag{6}$$

最后，TCG 和 TCB 的转换关系式 (3) 可以使用一个近似表达式 (单位为秒)，

$$TCB - TCG = L_{\mathrm{C}} \times (\mathrm{JD} - 2\,443\,144.5) \times 86\,400 + r_{\mathrm{E}}^i \upsilon_{\mathrm{E}}^i / c^2 + P \quad , \tag{7}$$

这里的 P 是个周期项，其分析表达式为 [23]：

$$\begin{aligned} P =& 0.001\,656\,8 \sin(35\,999.37°T + 357.5°) + 0.000\,022\,4 \sin(32\,964.5°T + 246°) + \\ & 0.000\,013\,8 \sin(71\,998.7°T + 355°) + 0.000\,004\,8 \sin(3\,034.9°T + 25°) + \\ & 0.000\,004\,7 \sin(34\,777.3°T + 230°) + \cdots \quad , \end{aligned}$$

其中，T 为从 J2000.0 起算的儒略世纪，更加详细的表达式请见参考文献 [24]。上面公式中的常数 L_{B}，L_{C} 以及 L_{G} 将会在后面给出。这样 IAU 在 1991 年的决议中不仅给出天体测量

学所需的时空度规，而且给出了完整的时间转换关系。不过，关于空间坐标的转换，IAU1991 决议没有给出相应的建议。

IAU1991 年决议所定义的相对论天文参考系，是相当简单和粗糙的，并没有完整的理论体系。就在该决议形成的前后，两个 1PN 相对论多参考系理论被先后提出，这两个理论体系更适用于构建太阳系内的天文参考系。这两个体系正是我们将在下面两章分别介绍的 B-K 体系和 DSX 体系，最新的 IAU 关于相对论参考系的决议正是基于这两套理论体系。

3　Brumberg-Kopeikin 体系

Brumberg 和 Kopeikin 在 20 世纪 80 年代末完成一系列工作 [11−13]，建立了一套完备的相对论天文参考系：原点在太阳系质心的太阳系质心参考系 (BRS) 和原点在地球质心的地心参考系 (GRS)。两者都是非旋转的谐和坐标系，其中 BRS 既是动力学非旋转的也是运动学非旋转 (两者等价)，但 GRS 只是动力学非旋转而不是运动学非旋转，因为 GRS 的度规不是渐近平坦的。BRS 的适用范围可以扩展到冥王星轨道 100 倍的范围，而 GRS 在建立时的目标是适用于月球轨道，但实际上可以扩展到冥王星轨道。Brumberg 和 Kopeikin 建立参考系的主要方法是：(1) 后牛顿近似方法；(2) 引力场的多极矩展开；(3) 引力场势函数和度规的渐近匹配技术。前两者用于解爱因斯坦场方程得到 BRS 和 GRS 的度规张量，第三个则用来建立 BRS 和 GRS 之间的转换关系。下面我们简单地回顾下 Brumberg 和 Kopeikin 体系的主要内容。

Brumberg 和 Kopeikin 的相对论参考系建立在三个假设条件下：一是忽略太阳系之外的所有其他宇宙物质的引力影响；二是低速弱场近似；三是天体是理想流体。对于太阳系而言，这几个假设都是合理的。在谐和坐标条件下，爱因斯坦场方程可以写成如下熟悉的形式：

$$\eta^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}_{\ \ \ \mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}(-g)(T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta}) + \chi^{\alpha\beta\mu\nu}_{\ \ \ \ \ \ \mu\nu} \quad , \tag{8}$$

式 (8) 中，$\gamma^{\alpha\beta}$ 和 $\chi^{\alpha\beta\mu\nu}$ 为：

$$\begin{cases} \gamma^{\alpha\beta} \equiv \eta^{\alpha\beta} - \sqrt{-g}g^{\alpha\beta} \quad , \\ \chi^{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\mu\nu} - \gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu} \quad . \end{cases} \tag{9}$$

为了得到 BRS 的背景度规，除了地球考虑了质量分布和自转外，太阳系其他所有天体都只处理成无旋转球对称的近似，采用渐近平坦的边值条件；但是对于 GRS 度规，则考虑了地球的自转以及引力场多极矩，而其边值条件则要求在远离地球质心处的度规要和太阳、月球以及其他行星产生的潮汐势相匹配。在 Brumberg 和 Kopeikin 的原始文献中，GRS 的度规张量用的是符号 $\hat{g}_{\alpha\beta}(u, \boldsymbol{w})$，本文中为了和上下文一致，我们采用已经约定的符号系统来描述。

根据文献 [11]，地球质心系中的度规张量写成如下形式：

$$\begin{cases} G_{00}(T,\boldsymbol{X}) = -1 + c^{-2}\overset{(2)}{G}_{00}(T,\boldsymbol{X}) + c^{-4}\overset{(4)}{G}_{00}(T,\boldsymbol{X}) + O(5) \quad , \\ G_{0i}(T,\boldsymbol{X}) = c^{-3}\overset{(3)}{G}_{0i}(T,\boldsymbol{X}) + O(5) \quad , \\ G_{ij}(T,\boldsymbol{X}) = \delta_{ij} - c^{-2}\overset{(2)}{G}_{ij}(T,\boldsymbol{X}) + O(4) \quad , \end{cases} \tag{10}$$

其中相应的函数的具体表达式如下：

$$\begin{cases} \overset{(2)}{G}_{00}(T,\boldsymbol{X}) = 2\hat{U}_{\mathrm{E}}(T,\boldsymbol{X}) + 2Q_i^{(E)}X^i + 3Q_{ij}^{(E)}X^iX^j + 5Q_{ijk}^{(E)}X^iX^jX^k + O(R^4) \quad , \\ \overset{(2)}{G}_{ij}(T,\boldsymbol{X}) = \delta_{ij}\overset{(2)}{G}_{00}(T,\boldsymbol{X}) \quad , \\ \overset{(3)}{G}_{0i}(T,\boldsymbol{X}) = -4\hat{U}_{\mathrm{E}}^i(T,\boldsymbol{X}) - 4\epsilon_{ijk}C_{jm}^{(E)}X^kX^m + O(R^3) \quad , \\ \overset{(4)}{G}_{00}(T,\boldsymbol{X}) = -2\hat{U}_{\mathrm{E}}^2(T,\boldsymbol{X}) - 2\hat{U}_{\mathrm{E}}(T,\boldsymbol{X})Q_i^{(E)}X^i - 6\hat{U}_{\mathrm{E}}(T,\boldsymbol{X})Q_{ij}^{(E)}X^iX^j + \\ \qquad O(\hat{U}_{\mathrm{E}}R^3) \quad , \\ \hat{U}_{\mathrm{E}}(T,\boldsymbol{X}) = G\displaystyle\int_{\mathrm{E}}\frac{\rho^*(T,\boldsymbol{X}')}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}'|}\mathrm{d}^3X' + O(2) \quad , \\ \hat{U}_{\mathrm{E}}^i(T,\boldsymbol{X}) = G\displaystyle\int_{\mathrm{E}}\frac{\rho^*(T,\boldsymbol{X}')}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}'|}\nu^i(T,\boldsymbol{X}')\mathrm{d}^3X' \quad , \\ \rho^*(T,\boldsymbol{X}) = \rho(T,\boldsymbol{X})u^0(T,\boldsymbol{X})\sqrt{-G} \quad , \\ \nu^i(T,\boldsymbol{X}) = \dfrac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}T} = \epsilon_{ijk}\hat{\omega}_{\mathrm{E}}^jX^k \quad . \end{cases} \tag{11}$$

对于地球的引力电和引力磁势 $\hat{U}_{\mathrm{E}}$, $\hat{U}_{\mathrm{E}}^i$，Brumberg 和 Kopeikin 仍然采用牛顿而非广义相对论的多极矩展开，

$$\begin{cases} \hat{U}_{\mathrm{E}}(T,\boldsymbol{X}) = \dfrac{G\hat{M}_{\mathrm{E}}}{R} + \dfrac{G}{2R^3}\hat{I}_{\mathrm{E}}^{ij}(-\delta_{ij} + \dfrac{3}{R^2}X^iX^j) + O(\alpha_{\mathrm{E}}\dfrac{L_{\mathrm{E}}^3}{R^3}) \quad , \\ \hat{U}_{\mathrm{E}}^i(T,\boldsymbol{X}) = G\epsilon_{ijk}\hat{\omega}_{\mathrm{E}}^j\hat{I}_{\mathrm{E}}^{km}\dfrac{X^m}{R^3} + O(\alpha_{\mathrm{E}}\dfrac{L_{\mathrm{E}}^3}{R^3}) \quad , \end{cases} \tag{12}$$

这里的 $\hat{M}_{\mathrm{E}}$ 和 $\hat{I}_{\mathrm{E}}^{ij}$ 分别是地球的质量和转动惯量。注意，在 B-K 文献中，变量上加 $\wedge$ 表示在 GRS 中的变量。

函数 Q_i^{E}, Q_{ij}^{E}, Q_{ijk}^{E}, C_j^{E}, $\cdots$ 只依赖于坐标时 T，本质上是通过解齐次的爱因斯坦场方程 (8) 决定的。其中 Q_i^{E} 表示地心世界线的外曲率，数值上就是地心在外部引力场中相对于做自由降落 ($Q_i^{\mathrm{E}} = 0$) 的参考系的加速度。显然，在 B-K 体系中，GRS 的坐标原点不再做测地线运动。剩下的函数则描述了太阳、月球以及其他行星造成的引力电和引力磁的潮汐场。这些函数的详细表达式可以通过渐近匹配技术解出，见参考文献 [11]。

下面我们给出太阳系质心系 BRS 中的度规张量：

$$
\begin{cases}
g_{00}(t,\boldsymbol{x}) = -1 + c^{-2}\overset{(2)}{g}_{00}(t,\boldsymbol{x}) + c^{-4}\overset{(4)}{g}_{00}(t,\boldsymbol{x}) + O(5) \quad , \\
g_{0i}(t,\boldsymbol{x}) = c^{-3}\overset{(3)}{g}_{0i}(t,\boldsymbol{x}) + O(5) \quad , \\
g_{ij}(t,\boldsymbol{x}) = \delta_{ij} - c^{-2}\overset{(2)}{g}_{ij}(t,\boldsymbol{x}) + O(4) \quad , \\
\overset{(2)}{g}_{00}(t,\boldsymbol{x}) = 2U_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x}) \quad , \\
\overset{(2)}{g}_{ij}(t,\boldsymbol{x}) = \delta_{ij}\overset{(2)}{g}_{00}(t,\boldsymbol{x}) \quad , \\
\overset{(3)}{g}_{0i}(t,\boldsymbol{x}) = -4U^i_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x}) \quad , \\
\overset{(4)}{g}_{00}(t,\boldsymbol{x}) = 2U^2_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x}) + 2W_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x}) \quad ,
\end{cases}
\tag{13}
$$

上式中的矢量势和标量势为：

$$
\begin{cases}
U(t,\boldsymbol{x}) = U_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x}) + \bar{U}(t,\boldsymbol{x}) \quad , \\
U^i(t,\boldsymbol{x}) = U^i_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x}) + \bar{U}^i(t,\boldsymbol{x}) \quad , \\
W(t,\boldsymbol{x}) = W_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x}) + \bar{W}(t,\boldsymbol{x}) \quad , \\
W_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x}) = -\dfrac{3}{2}\upsilon^2_{\mathrm{E}}U_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x}) + 3\upsilon^i_{\mathrm{E}}U^i_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x})G\displaystyle\int_{\mathrm{E}}\dfrac{\rho^*(t,\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\bar{U}(t,\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x' - \\
\qquad\qquad \dfrac{1}{2}\chi_{\mathrm{E},00}(t,\boldsymbol{x}) \quad ,
\end{cases}
\tag{14}
$$

式 (14) 中的函数：

$$
\begin{cases}
\chi_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x}) = -G\int_{\mathrm{E}}\rho^*(t,\boldsymbol{x}')|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|d^3x' \quad , \\
\rho^*(t,\boldsymbol{x}) = \rho(t,\boldsymbol{x})u^0(t,\boldsymbol{x})\sqrt{-g} \quad , \\
\bar{U}(t,\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{\mathrm{A}\neq\mathrm{E}}\dfrac{GM_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{A}}} \quad , \quad \bar{U}^i(t,\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{\mathrm{A}\neq\mathrm{E}}\dfrac{GM_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{A}}}\upsilon^i_{\mathrm{A}} \quad , \\
\bar{W}(t,\boldsymbol{x}) = \dfrac{3}{2}\displaystyle\sum_{\mathrm{A}\neq\mathrm{E}}\dfrac{GM_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{A}}}\upsilon^2_{\mathrm{A}} - \displaystyle\sum_{\mathrm{A}\neq\mathrm{E}}\sum_{\mathrm{B}\neq\mathrm{A}}\dfrac{G^2M_{\mathrm{A}}M_{\mathrm{B}}}{r_{\mathrm{A}}r_{\mathrm{AB}}} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\mathrm{A}\neq\mathrm{E}}GM_{\mathrm{A}}r_{\mathrm{A},00} \quad .
\end{cases}
\tag{15}
$$

我们可以清晰地看到，除了地球外的太阳系天体，全部简化成无自旋的点质量粒子。有关地球的势函数 U_{E}, U^i_{E}, W_{E}, χ_{E} 则考虑了地球的质量分布和自转，可以用多极矩的形式展开。

最后，我们给出 B-K 参考系的坐标转换。前面已经提到，通过在两个参考系的重叠区域匹配 BRS 和 GRS 度规可以给出两者的坐标转换关系。BRS 和 GRS 度规在重叠区域的变换关系如下：

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{x}) =& c^2G_{00}(T,\boldsymbol{X})\frac{\partial T}{\partial x^\mu}\frac{\partial T}{\partial x^\nu} + cG_{0i}(T,\boldsymbol{X})\frac{\partial T}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^i}{\partial x^\nu} + \\
& cG_{0i}(T,\boldsymbol{X})\frac{\partial X^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial T}{\partial x^\nu} + G_{ij}(T,\boldsymbol{X})\frac{\partial X^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^j}{\partial x^\nu} \quad .
\end{aligned}
\tag{16}
$$

BRS 和 GRS 之间的坐标变换应该具有如下的形式，

$$\begin{cases} T = t - c^{-2}[S(t) + \upsilon_{\mathrm{E}}^k r^k] + c^{-4}[B(t) - \dfrac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{E}}^2\upsilon_{\mathrm{E}}^k r^k + B^k(t)r^k + B^{km}(t)r^k r^m] + \\ \qquad O(c^{-4}r^3) + O(5) \quad , \\ X^i = r^i + c^{-2}\{[\dfrac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{E}}^i\upsilon_{\mathrm{E}}^k + F^{ik}(t) + D^{ik}(t)]r^k + D^{ikm}(t)r^k r^m\} + O(4) \quad . \end{cases} \tag{17}$$

通过度规的渐近匹配技术，可以决定上式中的函数 S, B, B^k, B^{ij}, F^{ij}, D^{ik}, D^{ikm} 以及 GRS 度规张量中的外部多极矩 Q_{ij}^{E}, Q_{ijm}^{E}, C_{ij}^{E}, $\cdots$. 详细的表达式过于繁琐，为节省篇幅这里不再列出，见参考文献 [11, 12]。

至此，我们介绍了 B-K 体系的基本原理、两个参考系的度规张量表示及坐标转换关系。对于地球卫星的轨道运动方程，我们显然可以在 GRS 坐标系中，通过测地线方程方便地写出；同时我们也可以在 BRS 中写出人造卫星的运动方程，然后通过上面给出的坐标转换关系将其转换到 GRS 中。这两个结果应该是相同的，只是后者远比前者复杂。Brumberg 和 Kopeikin 的计算表明这两个方法得到的运动方程确实是等价的，这也可以说明 B-K 体系是自洽的。显然，当我们讨论人造地球卫星的运动时，GRS 是合适的参考系；当我们讨论太阳系尺度的天体的运动时，BRS 更加方便。

4 Damour-Soffel-Xu 体系

Damour、Soffel 和 Xu 于 1991—1994 年创立了 1PN 的天体力学新理论 [14–17]，DSX 体系比 B-K 体系更加严格，已在 2000 年 IAU 大会关于相对论参考系的决议中被采纳。对于 DSX 体系，本章只做简单介绍，详细内容请参见原始文献或者文献 [25]。

4.1 后牛顿坐标系、度规和引力势

考虑由 N 个任意组成与形状、弱自引力、旋转、可形变的物体构成的孤立系统。取一个全局坐标系 (ct, x^i) 覆盖整个 N 体系统的时空，取 N 个局部坐标系 $(cT_A, X_A^a)(A = 1, 2, \cdots, N)$ 分别覆盖该系统中每个物体的局部时空 (有时为方便计，可略去局部坐标中表示物体的指标 A)。上述的 $N + 1$ 个坐标系应满足下列代数 (坐标) 条件：

$$\begin{cases} g_{00}g_{ij} = -\delta_{ij} + O(4) \quad , \\ G_{00}G_{ab} = -\delta_{ab} + O(4) \quad . \end{cases} \tag{18}$$

上式我们称之为 DSX 坐标条件，满足这种坐标条件的坐标系称之为 DSX 坐标系。DSX 坐标条件与通常的谐和规范或标准 PN 规范是相容的。

全局坐标与局部坐标之间的变换可写成如下形式：

$$x^\mu(X^\alpha) = z^\mu(T) + e_a^\mu(T)X^a + \xi^\mu(X^\alpha) \quad , \tag{19}$$

上式实际上是全局坐标 x^μ 对局部坐标 X^α 的展开式，称为 $z - e - \xi$ 变换公式，等式右边第一项是局部系原点在全局系中的坐标，第二项是 X^a 的线性项，第三项是 X^a 的二次及高次

项。式中的 e_a^μ, ξ^μ 请参考文献 [14] 中的 (2.36) 式。

全局坐标系下的度规张量是由标量势 w，矢量势 w_i(有时合并简写为 w_μ，但并不是四维张量，指标在上在下也无关紧要) 以及三度规 γ_{ij} 表示的，其中三度规 $\gamma_{ij}=\delta_{ij}+O(4)$。在 1PN 精度下，度规张量可以写成如下形式：

$$\begin{cases} g_{00}=-\exp(-2w/c^2)+O(6) \quad , \\ g_{0i}=-4w_i/c^3+O(5) \quad , \\ g_{00}=\delta_{ij}\exp(2w/c^2)+O(4) \quad . \end{cases} \tag{20}$$

利用上面的度规张量，可以使全局坐标系中的 1PN 场方程线性化，同时采用谐和坐标规范，场方程可以写成如下简化的形式：

$$\Box w_\mu=-4\pi G\sigma_\mu+O(4,2) \quad , \tag{21}$$

其中 $\Box\equiv\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ 为达朗贝尔算符，类似于 w_μ，$\sigma_\mu\equiv(\sigma,\sigma^i)$ 分别为引力质量密度和质量流密度，可用能动张量表示如下：

$$\sigma\equiv(T^{00}+T^{ii})/c^2, \quad \sigma^i\equiv T^{0i}/c \quad . \tag{22}$$

注意，不同于 B-K 体系，这里 DSX 体系中并没有限制天体为理想流体。

引力势 w_μ 的方程是线性的，满足叠加原理，因此可以分解成 $w_\mu^N+\bar{w}_\mu^N$ 两部分，前者是场方程式 (21) 的特解，后者是相应齐次方程的通解。特解 w_μ^N 也叫自势 (势的自部分)，是由该系统的物质产生的；通解 $\bar{w}_\mu^N$ 也叫外势 (势的外部分)，是由系统外部的物质或系统的非惯性运动产生的。对于 DSX 体系所设定的孤立的 N 体系统 (如太阳系)，外势 $\bar{w}_\mu^N=0$；内势 w_μ^N 的详细表达式会在下一章给出。

4.2 局部系的度规以及引力势变换

在上一节中关于全局坐标系的全部结果也适用于局部坐标系。不失一般性，可以考虑 N 体系统中的任一物体 A，A 的局部坐标系 X_A^α 中的度规可以写成如下形式：

$$\begin{cases} G_{00}=-\exp(-2W^A/c^2)+O(6) \quad , \\ G_{0i}=-4W_a^A/c^3+O(5) \quad , \\ G_{00}=\delta_{ab}\exp(2W^A/c^2)+O(4) \quad . \end{cases} \tag{23}$$

完全类似于全局坐标系中的做法，采用谐和坐标系后可以写出类似于式 (21) 的关于势函数 W_α^A 的场方程,

$$\Box_X W_\alpha^A=-4\pi G\Sigma_\alpha^A+O(4,2) \quad , \tag{24}$$

这里，$\Sigma_\alpha^A\equiv(\Sigma^A,\Sigma_a^A)$ 是相应的局部系中的质量和质量流密度。场方程式 (24) 的通解一样可以分解成非齐次方程的特解 W_α^{+A}(自势，即由物体 A 本身产生的势) 和相应齐次方程的通解

$\bar{W}^A_\alpha$(外势，即由所有其他物体所产生的势，也包括惯性项的贡献) 之和。显然，在这里，由于其他天体 (除 A 天体外) 的引力作用，外势不再为 0。

局部引力势 $W_\alpha(X) \equiv (W, W_a)$ 和全局引力势 $w_\mu \equiv (w, w_i)$ 之间满足如下的线性变换律：

$$\begin{cases} w = (1 + 2V^2/c^2)W + 4c^{-2}V^a W_a + \frac{1}{2}c^2 \ln(A^0_0 A^0_0 - A^0_a A^0_a) + O(4) \quad , \\ w_i = \upsilon^i W + R^i_a W_a + \frac{1}{4}c^3 \ln(A^0_0 A^i_0 - A^0_a A^i_a) + O(2) \quad , \end{cases} \tag{25}$$

其中 $V^a \equiv R^i_a \upsilon^i$，$R^i_a(T)$ 为时间缓变的三维旋转矩阵，$A^\mu_\alpha = \partial x^\mu / \partial X^\alpha$。上面的变换关系可以改写成更加紧凑的形式：

$$w_\mu(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}_{\mu\alpha}(T) W_\alpha(\boldsymbol{X}) + \mathcal{B}_\mu(\boldsymbol{X}) \quad . \tag{26}$$

可以证明，物体 A 的自势 W^{+A}_α 与 A 对全局坐标系中的势的贡献 (全局势中 A 产生的部分) w^A_μ 之间也有线性的变换律：

$$w^A_\mu(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}^A_{\mu\alpha}(T) W^{+A}_\alpha(\boldsymbol{X}) + O(4,2) \quad , \tag{27}$$

这是一个很重要的结论。我们还可以得到：

$$\sum_{B \neq A} w^B_\mu(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}^A_{\mu\alpha}(T) \bar{W}^A_\alpha(\boldsymbol{X}) + \mathcal{B}^A_\mu(\boldsymbol{X}) + O(4,2) \quad . \tag{28}$$

在 σ^A_μ 和 Σ^A_α 之间也存在相似的线性变换关系：

$$\sigma^A_\mu(\boldsymbol{x}) = \left| \frac{\partial X}{\partial x} \right| \mathcal{A}^A_{\mu\alpha}(T) \Sigma^A_\alpha(\boldsymbol{X}) + O(4,2) \quad . \tag{29}$$

局部坐标系中的引力势已经被分解为自势和外势两部分。自势部分将会在下节用 BD 多极矩展开；而外势则可以用潮汐矩展开，还可以进一步分解成天体 $B(\neq A)$ 的贡献和惯性项 (来源于局部坐标系相对全局坐标系的运动，由坐标变换确定) 之和。

4.3 自势和外势的展开

我们先看自势部分的展开。可以从牛顿力学的质量多极矩定义开始。由于天体不能再简单地处理成点粒子，天体 A 在任意场点 $\boldsymbol{x}$ 处的引力势可以以场点到 A 天体的质心之间的距离展开成泰勒级数：

$$U(\boldsymbol{x}, t) = \frac{GM}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_A|} - \partial_i \left(\frac{GM_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_A|} \right) + \frac{1}{2!} \partial_{ij} \left(\frac{GM_{ij}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_A|} \right) + \cdots + \frac{(-)^l}{l!} \partial_L \left(\frac{GM_L}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_A|} \right) + \cdots \quad , \tag{30}$$

这里的 M_L 即是牛顿的多极矩，定义如下：

$$M_L(t) = \int_A \mathrm{d}^3 X \hat{X}^L \rho_A(\boldsymbol{X}, t) \quad . \tag{31}$$

引力势的多极矩展开在数学上完全和球谐函数展开等价。物理学家偏爱前者，因为其更容易写成数学上紧凑优美的形式；而天文学家则更愿意选择直观方便的后者。Kip Thorne 曾经系统地总结了引力物理中使用的各种球谐函数和对称无迹张量 [26]。不同于牛顿力学，在广义相对论框架下，引力势的多极矩展开变得相当困难和复杂。首先，由于广义相对论中质量体的运动也会对引力势有贡献，因此，需要引入除类似于牛顿多极矩 (见式 (31)) 的质量多极矩外，还需引入自旋多极矩来描述这一引力磁势 (类比于电磁学)。即使在最简单的渐近平坦的稳态引力场中，相对论的引力势展开可以写成类似于式 (30) 的形式，但是多极矩的展开却无法类似于式 (31) 中是对“源”的直接积分，而是变成了“场”多极矩。更一般地，如果我们抛弃严格稳态引力场的假设，问题变得更加困难：既写不出类似于牛顿的引力势展开式 (30)，也不能把多极矩写成类似于牛顿多极矩的式 (31)。

如果不是完全的广义相对论框架，而只对其考虑一阶的后牛顿近似，上面所提到的问题则可以得到很好的解决。这首先由 Blanchet 和 Damour 在 1989 年讨论引力系统的引力波辐射多极矩中给出 [27]，并运用到 DSX 体系中 [14]，因此称为 BD 多极矩。在天体 A 的任意局部参考系 X^α 中，源产生的局部系中的引力势包含标量势和矢量势 (W, W_a)，在该引力体外部，产生如下的引力势和多极矩展开：

$$W(T,\boldsymbol{X}) = G\sum_{l\geq 0}\frac{(-)^l}{l!}\partial_L[R^{-1}M_L(T\pm R/c)] + \frac{1}{c^2}\partial_T(\Lambda-\lambda) + O(4) \quad , \tag{32}$$

$$\begin{aligned} W_a(T,\boldsymbol{X}) = G\sum_{l\geq 1}\frac{(-)^l}{l!}(\dot{M}_{aL-1}\partial_{L-1}R^{-1} + \frac{l}{l+1})\epsilon_{abc}S_{cL-1}\partial_{bL-1}R^{-1} + \\ \frac{1}{4}\partial_a(\Lambda-\lambda) + O(2) \quad , \end{aligned} \tag{33}$$

其中的 $\lambda(T,\boldsymbol{X})$ 为任意的规范函数，另外

$$\Lambda \equiv 4G\sum_{l\geq 0}\frac{(-)^l}{(l+1)!}\frac{2l+1}{2l+3}P_L\partial_L R^{-1} \quad , \quad P_L(T) \equiv \int_A \mathrm{d}^3X\hat{X}^{bL}\Sigma^b(T,\boldsymbol{X}) \quad . \tag{34}$$

上面引力势展开式中的质量多极矩和自旋多极矩为

$$M_L(T) \equiv \int_A \mathrm{d}^3X\hat{X}^L\Sigma + \frac{1}{2(2l+3)c^2}\ddot{N}_L - \frac{4(2l+1)}{(l+1)(2l+3)c^2}\dot{P}_L \quad (l\geq 0) \quad , \tag{35}$$

$$S_L(T) \equiv \int_A \mathrm{d}^3X\epsilon^{ab<c_l}\hat{X}^{L-1>a}\Sigma^b \quad (l\leq 1), \quad N_L \equiv \int_A \mathrm{d}^X\boldsymbol{X}^2\hat{X}^L\Sigma \quad . \tag{36}$$

我们可以发现，除了含有规范函数 (见式 (32) 中的第二项)，以及被称为“坏矩”的 N_L, P_L(见式 (35))，标量引力势式 (式 (32)) 和质量多极矩 (式 (35)) 的展开类似于牛顿的形式。但是所谓的 “坏矩” 完全被包含在质量多极矩中，没有显式地体现在引力势的展开之中，而多极矩实际上是通过测量确定的。对于规范，可以选取 $\lambda=\Lambda$，这正是谐和规范，也是 DSX 体系以及 IAU 决议中所采用的。这样，引力势的展开和多极矩的定义就被完全确定了，确实，和牛顿力学的形式非常相似，但多了矢量势 (式 (33)) 和自旋多极矩 (式 (36))。

尽管理论上多极矩可以通过测量确定，但是现在通用的地球引力场模型都是用球谐函数表示的 (如文献 [28–30])，实际测量的正是球谐函数系数 (最新的地球引力场模型请参看美国地理空间情报局网站 [31])。因此实际使用中，需要将多极矩和球谐函数系数互相转换，这方面，Hartmann 等人在 1994 年给出了牛顿力学下的两者之间一个一般的转换公式 [32]。对于 1 PN 精度下的两者转换，Tao 等人给出了最低阶的球谐函数系数和多极矩之间的关系式 [33]；同时他们还将 BD 多极矩投影到随地球一起转动的参考系上，克服了 BD 多极矩随地球自转快速变化的缺点，得到了只随时间缓慢变化的多极矩定义。

在 DSX 体系中，外势是用相对论潮汐矩来展开的，先定义相对论潮汐矩，

$$\begin{cases} G^A(T) \equiv \bar{W}^A(T,0) + O(4) \quad , \\ G^A_L(T) \equiv [\partial_{<L-1}\bar{E}^A_{al>}(T,\boldsymbol{X})]_{\boldsymbol{X}=0} + O(4) \quad , \quad l \geq 1 \\ H^A_L(T) \equiv [\partial_{<L-1}\bar{B}^A_{al>}(T,\boldsymbol{X})]_{\boldsymbol{X}=0} + O(2) \quad , \quad l \geq 1 \end{cases} \tag{37}$$

其中 G^A_L 是引力电潮汐矩，$l=0$ 时就是 G^A。G^A 的定义式 (37) 要求规范函数满足 $\lambda(T,0)=O(2)$，DSX 的坐标规范确实满足这一要求。H^A_L 是引力磁潮汐矩，它和 G^A_L 都是由外势 $\bar{W}^A_\alpha$ 产生的：

$$\begin{cases} \bar{E}_a \equiv \partial_a\bar{W} + \dfrac{4}{c^2}\partial_T\bar{W}_a \quad , \\ \bar{B}_{ab} \equiv -4(\partial_a\bar{W}_b - \partial_b\bar{W}_a) \quad . \end{cases} \tag{38}$$

反过来，外势又可以用潮汐矩展开：

$$\begin{cases} \bar{W}^A(T,\boldsymbol{X}) = \displaystyle\sum_{l\geq 0}\frac{1}{l!}\{\hat{X}^L G^A_L(T) + \boldsymbol{X}^2\hat{X}^L\ddot{G}^A_L(T)/[2(2l+3)c^2]\} + \\ \qquad\qquad c^{-2}\partial_T\bar{\Lambda}^A + O(4)\,, \\ \bar{W}^A_a(T,\boldsymbol{X}) = \displaystyle\sum_{l\geq 0}\frac{1}{(l+1)!}[-\frac{2l+1}{2l+3}\hat{X}^{aL}\dot{G}^A_L(T) + \frac{1}{4}\epsilon_{abc}\hat{X}^{bL-1}H^A_{cL-1}(T)] - \\ \qquad\qquad \partial_a\bar{\Lambda}^A/4 + O(2) \quad , \end{cases} \tag{39}$$

其中 $\bar{\Lambda}^A$ 是满足 $\bar{\Lambda}^A(T,\boldsymbol{0})=O(2)$ 的任意可微函数。若 $\Box_X\bar{\Lambda}^A(T,\boldsymbol{0})=O(2)$ 则对应于谐和规范。最后注意，在 DSX 理论中，BD 多极矩和 1PN 潮汐矩都是对称无迹 (STF) 张量。

至此，我们已经完整写出 DSX 体系所定义的 N 体孤立引力系统的全局坐标系和局部坐标系下的度规；并且将局部系中度规的势函数分成自势和外势，分别用 BD 多极矩和 1PN 的相对论潮汐矩展开。全局系中的势函数则又可以根据坐标系的转换关系由 W_α 转换得到。有了这些 DSX 就可以给出 N 体孤立系统中任意运动天体的完全 1PN 精度的质量演化方程、平移运动方程和自转运动方程。这比 Brumberg-Kopeikin 的运动方程更加完整。IAU2000 年关于相对论参考系的决议正是基于 DSX 体系，并完全采用了它的符号系统。我们将在下一章详细介绍。

5　IAU 2000 年关于相对论参考系的决议

天体测量技术的快速发展使 IAU1991 年关于相对论参考系的决议很快就显得落后了，1997 年在东京举行的 IAU 会议上，人们已经发现原来的一阶近似已经不能满足当时的观测精度。另外 IAU1991 决议给出的时空度规式 (1) 是引力体的牛顿势的直接线性相加，不是爱因斯坦场方程的后牛顿解。从 20 世纪 70 年代开始，美国喷气推进实验室就已经通过数值积分后牛顿 N 体动力学系统的 Einstein-Infeld-Hoffmann 方程 [34]，来给出太阳系大行星和月球历表。但是度规式 (1) 并不能给出 Einstein-Infeld-Hoffmann 方程。2000 年，在曼彻斯特举行的第 24 届 IAU 大会上，通过了由 IAU 天体力学和天体测量学中的相对论工作组，以及由国际计量局和 IAU 相对论时空参考系及计量工作组组成的联合委员会提出的一系列关于相对论时空参考系的决议 (B1.3—-B1.5 以及 B1.9)。决议基于两个主要的相对论 N 体及多参考系理论：Brumberg-Kopeikin 体系 [11–13, 35]、Damour-Soffel-Xu 体系 [14–17]。

5.1　太阳系质心参考系

假设太阳系为宇宙中唯一的引力源，则 BCRS 中的度规张量可以写成如下形式：

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \dfrac{2w}{c^2} - \dfrac{2w^2}{c^4} + O(5) \quad , \\ g_{0i} = -\dfrac{4}{c^3} w^i + O(5) \quad , \\ g_{ij} = \delta_{ij}\left(1 + \dfrac{2w}{c^2}\right) + O(4) \quad . \end{cases} \tag{40}$$

其中，w, w^i 分别是标量势和矢量势。采用谐和规范后，后牛顿的爱因斯坦场方程为：

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) w = -4\pi G\sigma + O(4) \quad , \\ \nabla^2 w^i = -4\pi G\sigma^i + O(2) \quad . \end{cases} \tag{41}$$

其中 σ, σ^i 分别为引力质量密度和质量流密度，和能动张量 $T^{\mu\nu}$ 的关系为

$$\sigma = \frac{1}{c^2}(T^{00} + T^{ii}) \quad , \quad \sigma^i = \frac{1}{c} T^{0i} \quad . \tag{42}$$

能动张量中包含了能量密度、压力以及动量密度，在广义相对论中，这些都是能够影响引力场的源。假设时空渐近平坦 (太阳系为宇宙中唯一的引力源，忽略包括银河系在内的其他一切引力体)，标量和矢量势的解可以表达为

$$\begin{cases} w(t, \boldsymbol{x}) = G\displaystyle\int \mathrm{d}^3x' \frac{\sigma(t, \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + \frac{G}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathrm{d}^3x' \frac{\sigma(t, \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \quad , \\ w^i(t, \boldsymbol{x}) = G\displaystyle\int \mathrm{d}^3x' \frac{\sigma^i(t, \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \quad . \end{cases} \tag{43}$$

将引力势分解成标量和矢量两个部分的好处就是，场方程 (41) 是线性的，因此，N 个引力体集合的引力势就是简单的线性相加：

$$w(t,\boldsymbol{x})=\sum_{A=1}^{N}w_A(t,\boldsymbol{x}) \quad , \quad w^i(t,\boldsymbol{x})=\sum_{A=1}^{N}w_A^i(t,\boldsymbol{x}) \quad . \tag{44}$$

取最简单的质量单极–自旋偶极近似 (大多数情况下足够了)，则可以写出势函数的显式表达式：

$$\begin{cases} w=w_0+\Delta/c^2=\displaystyle\sum_A\frac{GM_A}{r_A}+\sum_A\Delta_A(t,\boldsymbol{x}) \quad , \\ w^i=\displaystyle\sum_A\frac{-G(\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{S}_A)^i}{2r_A^3}+\frac{GM_A}{r_A}v_A^i \quad , \end{cases} \tag{45}$$

其中的函数 Δ_A 为

$$\Delta_A(t,\boldsymbol{x})=\frac{GM_A}{r_A}\left\{-2v_A^2+\sum_{B\neq A}\frac{GM_B}{r_{BA}}+\frac{1}{2}\left[\frac{(r_A^k v_A^k)^2}{r_A^2}+r_A^k a_A^k\right]\right\}+\frac{2Gv_A^k(\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{S}_A)^k}{r_A^3} \quad , \tag{46}$$

其中 r_{BA} 为引力体 A 到引力体 B 的欧氏距离，$\boldsymbol{a}_A$ 则为加速度。

5.2 地球质心参考系

GCRS 是地球的局部参考系，处理地球引力范围的问题显然比 BCRS 更加方便，比如，研究人造地球卫星的运动。IAU2000 决议定义的 GCRS 的空间坐标轴 X^a 要求相对于 BCRS 的空间轴 x^i 是运动学无旋转的 [11, 36]。GCRS 中的度规张量和 BCRS 中的形式完全相同，只是势函数不同，

$$\begin{cases} G_{00}=-1+\dfrac{2W}{c^2}-\dfrac{2W^2}{c^4}+O(5) \quad , \\ G_{0a}=-\dfrac{4}{c^3}W^a+O(5) \quad , \\ G_{ab}=\delta_{ab}\left(1+\dfrac{2W}{c^2}\right)+O(4) \quad . \end{cases} \tag{47}$$

其中势函数 $W^\alpha=(W,\, W^a)$ 可以分解成两个部分：

$$W^\alpha(T,X)=W_{\mathrm{E}}^\alpha(T,X)+W_{\mathrm{ext}}^\alpha(T,X) \quad . \tag{48}$$

W_{E}^α 为地球自身贡献的引力势，其定义和方程 (43) 完全相同，只需将其中的坐标变量换为 $(T,\, X)$ 即可；W_{ext}^α 则是由除地球以外的太阳系其他引力体产生的外部引力势，可以分解为潮汐部分和惯性部分：$W_{\mathrm{ext}}^\alpha=W_{\mathrm{tidal}}^\alpha+W_{\mathrm{iner}}^\alpha$。

地球自身引力势类似于牛顿力学的情况，必然需要包含多极矩展开，只是后牛顿的多极矩的定义更加复杂。IAU2000 决议采用前面讨论的一阶后牛顿的 B-D 多极矩理论 [14, 27]，或

者等价地，也可以采用天文上更加熟悉的球谐展开。我们这里直接给出多极矩展开式：

$$\begin{cases} W_{\mathrm{E}} = G\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^l}{l!}\left(\mathcal{M}_L\partial_L\dfrac{1}{|\boldsymbol{X}|}+\dfrac{1}{2c^2}\ddot{\mathcal{M}}_L\partial_L|\boldsymbol{X}|\right)+\dfrac{4}{c^2}\dot{\Lambda}+O(4) \quad , \\ W_{\mathrm{E}}^a = G\sum\limits_{l=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^l}{l!}\left(\dot{\mathcal{M}}_{aL-1}\partial_{L-1}\dfrac{1}{|\boldsymbol{X}|}+\dfrac{1}{l+1}\epsilon_{abc}\mathcal{S}_{cL-1}\partial_{bL-1}\dfrac{1}{|\boldsymbol{X}|}\right)-\Lambda_{,a}+O(2)\,, \\ \Lambda = G\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^l}{(l+1)!}\dfrac{2l+1}{2l+3}\mathcal{P}_L\partial_L\dfrac{1}{|\boldsymbol{X}|}, \quad \mathcal{P}_L=\displaystyle\int_V\Sigma^a\hat{X}^{aL}\mathrm{d}^3X \quad , \end{cases} \tag{49}$$

其中的 $\mathcal{M}$, $\mathcal{S}$ 分别为 B-D 多极矩中的质量多极矩和自旋多极矩。由于规范函数 Λ 不会进入后牛顿的运动方程，W_{E} 等价的球谐函数展开式为：

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{E}} =& \frac{GM_{\mathrm{E}}}{|\boldsymbol{X}|}\left\{1+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{R_E}{|\boldsymbol{X}|}\right)^l P_{lm}(\cos\theta)[\mathcal{C}_{lm}(T,|\boldsymbol{X}|)\cos m\phi+\right. \\ & \left.\mathcal{S}_{lm}(T,|\boldsymbol{X}|)\sin m\phi]\right\}+O(4) \quad , \end{aligned} \tag{50}$$

其中的两个系数函数为

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{lm}^{\mathrm{E}}(T,|\boldsymbol{X}|) = C_{lm}^{\mathrm{E}}(T)-\dfrac{1}{2(2l-1)}\dfrac{|\boldsymbol{X}|^2}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}T^2}C_{lm}^{\mathrm{E}}(T) \quad , \\ \mathcal{S}_{lm}^{\mathrm{E}}(T,|\boldsymbol{X}|) = S_{lm}^{\mathrm{E}}(T)-\dfrac{1}{2(2l-1)}\dfrac{|\boldsymbol{X}|^2}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}T^2}S_{lm}^{\mathrm{E}}(T) \quad . \end{cases} \tag{51}$$

一个显而易见的问题是，球谐展开式中的系数 C_{lm}^{E}, S_{lm}^{E} 是在运动学无旋转的 GCRS 中定义的；因此，对于旋转地球，这两个系数并非常数，而是随时间变化的量，它们其实可以从随着地球一起旋转的地固系中相应的常系数通过坐标变换得到。这一点已经由 Tao 等人在 1998 年进行过详细讨论 [33]。

引力磁产生的矢量势 W_{E}^a，可以从方程 (49) 看出，是由自旋多极矩以及质量多极矩对时间的一阶导数决定的。根据 Soffel 等人的分析 [18]，地球的 $\dot{\mathcal{M}}_{aL-1}$ 远小于自旋的贡献，完全可以忽略。同时，考虑到引力磁只产生非常弱的相对论效应 (Lense-Thirring 效应以及时间变换过程中的高阶项)，因此矢量势只需考虑到最低价即可，

$$W_{\mathrm{E}}^a(T,\boldsymbol{X}) = -\frac{G}{2}\frac{(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}})^a}{|\boldsymbol{X}|^3} \quad , \tag{52}$$

这里的自旋矢量 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}}$ 是由自旋偶极矩 $\mathcal{S}_a$ 的分量构成的。计算 W_{E}^a 只需要牛顿阶的自旋矢量即可，可以直接从当前地球岁差 - 章动模型得到。

现在，我们来考虑外部引力势 $W_{\mathrm{ext}}^{\alpha}$。前面提到外部势可以分解成两部分：一为潮汐势，一为惯性势。潮汐部分至少是 X^a 的二次项，而惯性项则和 X^a 是线性关系：

$$W_{\mathrm{iner}} = Q_aX^a \quad , \quad W_{\mathrm{iner}}^a = -c^2\epsilon_{abc}\varOmega_{\mathrm{iner}}^bX^c/4 \quad . \tag{53}$$

理论上，Q_a 项是因为地球不是理想的点粒子而造成的测地线偏离产生的，可以用地心在外部引力场的四加速度来定义，

$$Q_a = \delta_{ai}\Big[\frac{\partial}{\partial x^i} w_{\rm ext}(\boldsymbol{x}_{\rm E}) - a^i_{\rm E}\Big] \quad , \tag{54}$$

其中 $w^{\mu}_{\rm ext}(t,\boldsymbol{x}) = \sum_{A\neq E} w^{\mu}_A(t,\boldsymbol{x})$。比如，月球造成的 Q_a 值，大约是 4×10^{-11}[37]。具体的后牛顿表达式，可以由文献 [14] 中的 (6.30a) 式推出。

惯性势的矢量部分 $W^a_{\rm iner}$ 描述了 (运动学非旋转的)GCRS 相对于动力学非旋转的地心参考系的旋转造成的相对论科里奥利力。由三部分组成：

$$\boldsymbol{\Omega}_{\rm iner} = \boldsymbol{\Omega}_{\rm GP} + \boldsymbol{\Omega}_{\rm LTP} + \boldsymbol{\Omega}_{\rm TP} \quad , \tag{55}$$

分别为测地岁差，Lense-Thirring 进动以及 Thomas 进动。具体的表达式如下：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega}_{\rm GP} = -\dfrac{3}{2c^2}\boldsymbol{v}_{\rm E}\times\nabla w_{\rm ext}(\boldsymbol{x}_{\rm E}) \quad , \\ \boldsymbol{\Omega}_{\rm LTP} = -\dfrac{2}{c^2}\nabla\times\boldsymbol{w}_{\rm ext}(\boldsymbol{x}_{\rm E}) \quad , \\ \boldsymbol{\Omega}_{\rm TP} = -\dfrac{1}{2c^2}\boldsymbol{v}_{\rm E}\times\boldsymbol{Q} \quad . \end{cases} \tag{56}$$

三个进动中，测地岁差最大，约每世纪 $2''$；Thomas 进动最小，完全可以忽略；Lense-Thirring 效应造成大约每世纪 2×10^{-3} 的进动。B-K 体系中定义的 GRS 是动力学非旋转的，不会出现上面这些进动项。但是从天体测量角度来说，运动学非旋转的参考系更容易实现 (相对于遥远的射电源没有旋转)，因此 DSX 体系和 IAU 决议中定义 GCRS 是运动学非旋转的。

最后，我们给出潮汐部分的表达式。潮汐势的定义是牛顿力学情况的推广。完整的后牛顿潮汐势表达式，由 Damour 等在 1992 年给出 [15]，闭形式的表达式由 Klioner 和 Voinov 在 1993 年给出 [35]。潮汐势的主要部分，

$$W_{\rm tidal}|_{l=2} = \frac{1}{2}G^{\rm tidal}_{ab}X^aX^b \quad , \tag{57}$$

其中的系数 $G^{\rm tidal}_{ab}$ 在取质量单极近似下，分别由文献 [17] 和 [38] 给出低阶和高阶形式。

5.3 坐标变换

实际应用中，我们需要把 GCRS 中的量和 BCRS 中的量进行转换，这个转换过程不再是牛顿力学里面简单的伽利略变换。显然，从 GCRS 到 BCRS 的坐标变换 $x^{\mu}(T,X^a)$ 和逆变换 $X^{\alpha}(t,x^i)$ 是完全等价的。不过在广义相对论中，由于各自的坐标时不同，这两个变换之间的互相转换并不是显而易见的关系。在 DSX 体系中，使用的是第一种变换形式 $x^{\mu}(T,X^a)$[14–17]，而 B-K 体系使用的是第二种变换关系 [11–13, 35]。

我们首先给出 $x^{\mu}\rightarrow X^{\alpha}$ 之间的转换关系：

$$\begin{cases}T=t-\dfrac{1}{c^2}\left[A(t)+\upsilon_{\mathrm{E}}^i r_{\mathrm{E}}^i\right]+\dfrac{1}{c^4}\left[B(t)+B^i(t)r_{\mathrm{E}}^i+B^{ij}(t)r_{\mathrm{E}}^i r_{\mathrm{E}}^j+C(t,\boldsymbol{x})\right]+O(5)\ ,\\ X^a=\delta_{ai}\left\{r_{\mathrm{E}}^i+\dfrac{1}{c^2}\left[\dfrac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{E}}^i\upsilon_{\mathrm{E}}^j r_{\mathrm{E}}^j+w_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})r_{\mathrm{E}}^i+r_{\mathrm{E}}^i a_{\mathrm{E}}^j r_{\mathrm{E}}^j-\dfrac{1}{2}a_{\mathrm{E}}^i r_{\mathrm{E}}^2\right]\right\}+O(4)\quad ,\end{cases} \tag{58}$$

其中，

$$\begin{cases}\dot{A}(t)=\dfrac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{E}}^2+w_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})\quad ,\\ \dot{B}(t)=-\dfrac{1}{8}\upsilon_{\mathrm{E}}^4-\dfrac{3}{2}\upsilon_{\mathrm{E}}^2 w_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})+4\upsilon_{\mathrm{E}}^i w_{\mathrm{ext}}^i(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})+\dfrac{1}{2}w_{\mathrm{ext}}^2(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})\quad ,\\ B^i(t)=-\dfrac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{E}}^2\upsilon_{\mathrm{E}}^i+4w_{\mathrm{ext}}^i(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})-3\upsilon_{\mathrm{E}}^i w_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})\quad ,\\ B^{ij}(t)=-\upsilon_{\mathrm{E}}^i\delta_{aj}Q^a+2\dfrac{\partial}{\partial x^j}w_{\mathrm{ext}}^i(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})-\upsilon_{\mathrm{E}}^i\dfrac{\partial}{\partial x^j}w_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})+\dfrac{1}{2}\delta^{ij}\dot{w}_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})\quad ,\\ C(t,\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{10}r_{\mathrm{E}}^2(\dot{a}_{\mathrm{E}}^i r_{\mathrm{E}}^i)\quad .\end{cases} \tag{59}$$

而 GCRS 到 BCRS 的变换关系为：

$$x^\mu(X^\alpha)=z^\mu(T)+e_a^\mu(T)X^a+\xi^\mu(X^\alpha)\quad , \tag{60}$$

这里 $z^\mu(T)$ 为地球质心的 BCRS 坐标。对于低速弱场近似，DSX 坐标条件要求的相关系数为：

$$\begin{aligned}&e_0^0(T)=c^{-1}\dot{z}^0=1+O(2)\quad ,\\ &e_0^i(T)=c^{-1}\dot{z}^i\quad ,\\ &e_a^0(T)=c^{-1}e_a^i\dot{z}^i+O(3)\quad ,\\ &e_0^0(T)e_a^i(T)=(1+\upsilon^2/2c^2)(\delta^{ij}+\upsilon^i\upsilon^j/2c^2)R_a^i(T)+O(4)\quad ,\\ &\xi^0(X^\alpha)=O(3)\quad ,\\ &\xi^i(X^\alpha)=c^{-2}e_a^i(T)[A_a\boldsymbol{X}^2/2-X^a(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X})]+O(4)\quad ,\end{aligned}$$

其中 $A_a=R_a^i\ddot{z}^i$，$R_a^i(T)$ 是三维欧式空间中时间缓变的旋转矩阵。

因为涉及到很多不同的时间定义，我们着重来看一下时间变换。BCRS 度规中的势 $w(t,\boldsymbol{x})$ 可以写成如下形式：

$$w=w_0+w_L-\Delta/c^2\quad . \tag{61}$$

这和单极近似中的表达式 (45) 相比，多了一项 w_L，这正是 $l\geq 1$ 的多极矩高阶项。这样原时和坐标时 TCB 的转换关系可以写为

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{dTCB}}=1-\frac{1}{c^2}(w_0+w_L+\upsilon^2/2)+\frac{1}{c^4}(-\upsilon^4/8-3\upsilon^2/2w_0+4\upsilon^i w^i+w_0^2/2+\Delta)\quad , \tag{62}$$

这里的 υ^i 是观测者的 BCRS 坐标速度。同样，TCB 和 TCG 之间的转换关系也可以在保证足够精度的情况下简化为：

$$\begin{aligned} TCB-TCG =& c^{-2}\left\{\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\upsilon_{\mathrm{E}}^2}{2}+w_{0,\mathrm{ext}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})\right]\mathrm{d}t+\upsilon_{\mathrm{E}}^i r_{\mathrm{E}}^i\right\}+c^{-4}\left[3w_{0,\mathrm{ext}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})+\frac{\upsilon_{\mathrm{E}}^2}{2}\right]\upsilon_{\mathrm{E}}^i r_{\mathrm{E}}^i- \\ & c^{-4}\left\{\int_{t_0}^{t}\left[-\frac{\upsilon_{\mathrm{E}}^4}{8}-\frac{3}{2}\upsilon_{\mathrm{E}}^2 w_{0,\mathrm{ext}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})+4\upsilon_{\mathrm{E}}^i w_{0,\mathrm{ext}}^i(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})+\frac{1}{2}w_{0,\mathrm{ext}}^2(\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}})\right]\mathrm{d}t\right\}. \end{aligned} \tag{63}$$

同样，类似于 IAU1991 决议，TT、TCG、TCB 之间的转换关系可以用 3 个常数来给出，

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}TT/\mathrm{d}TCG=1-L_G\quad, \\ <TCG/TCB>=1-L_C\quad, \\ <TT/TCB>=1-L_B\quad, \end{array}\right. \tag{64}$$

这里的 <> 表示一个足够长时间尺度上的平均。相关的常数参见表 1[18]。

表 1　不同时间尺度相关的常数 L_C, L_G, L_B 的值，引自文献 [18]。

Constant	IAU 1991 /s · s^{-1}	IAU 2000 /s · s^{-1}	IAU 2000 /ms · a^{-1}
L_C	$1.480\,813\times10^{-8}$	$1.480\,826\,867\,41\times10^{-8}$	467.313
L_G	$6.969\,291\times10^{-10}$	$6.969\,290\,134\times10^{-10}$	21.993
$L_B\equiv L_C+L_G-L_CL_G$	$1.550\,505\times10^{-8}$	$1.550\,519\,767\,72\times10^{-8}$	489.307

最后，根据 BCRS 和 GCRS 之间的坐标变换关系，我们能给出相应的引力势之间的变换公式：

$$\left\{\begin{array}{l} W_{\mathrm{E}}(T,\boldsymbol{X})=w_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x})(1+2\upsilon_{\mathrm{E}}^2/c^2)-\dfrac{4}{c^2}\upsilon_{\mathrm{E}}^i w_{\mathrm{E}}^i(t,\boldsymbol{x})+O(4)\quad, \\ W_{\mathrm{E}}^a(T,\boldsymbol{X})=\delta_i^a[w_{\mathrm{E}}^i(t,\boldsymbol{x})-\upsilon_{\mathrm{E}}^i w_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x})]+O(2)\quad, \\ w_{\mathrm{E}}(t,\boldsymbol{x})=W_{\mathrm{E}}(T,\boldsymbol{X})(1+2\upsilon_{\mathrm{E}}^2/c^2)+\dfrac{4}{c^2}\delta_{ia}\upsilon_{\mathrm{E}}^i W_{\mathrm{E}}^a(T,\boldsymbol{X})+O(4)\quad, \\ w_{\mathrm{E}}^i(t,\boldsymbol{x})=\delta_a^i W_{\mathrm{E}}^a(T,\boldsymbol{X})+\upsilon_{\mathrm{E}}^i W_{\mathrm{E}}(T,\boldsymbol{X})+O(2)\quad. \end{array}\right. \tag{65}$$

6　IAU2000 决议工程化、发展及展望

至今为止，IAU2000 年决议是 IAU 关于相对论天文参考架最重要的决议。在发布后的 10 多年里，飞速发展的天文观测技术和观测计划开始逐渐使用 IAU 决议所确定的天文参考

系来考虑相对论效应产生的微小但可测的效应。

作为一个例子，这里简单介绍一下 Gaia 天体测量卫星的两个相对论模型。这两个模型都是以 IAU2000 决议为基础的，或者说和决议协调一致。其一是 Klioner 在 2003 年给出的 Gaia 相对论模型 (GREM)[38]，此模型在 IAU2000 决议的度规基础上，加入参数化后牛顿参数 β, γ；其工作原理是传统的光线微扰方法：即在闵可夫斯基空间中直线传播的光线路径加上因为引力源造成的光线弯曲、光行差、视差以及自行等物理和天文的影响，构造光线传播方程。另一模型是 de Felice 等人给出的所谓完全相对论模型，称为 RAMOND[39–41]；该模型用数值积分一组“master”方程来反溯光线的传播路径，从而得到“真实的”天体位置。RAMOND 所使用的太阳系背景度规正是 IAU 决议所确定的 BCRS 度规，此外，RAMOND 的光线反溯方程并没有使用后牛顿近似展开。这两个模型都可以达到 1 微角秒的水平，对 BCRS 甚至可以达到 0.1 微角秒。另外，甚长基线干涉测量 (VLBI) 的数据处理模型，也相应地根据 IAU2000 决议做出了更新 [42, 43]。

但是 IAU2000 决议更广泛的工程化应用却受到其自身缺陷的限制。一个很重要的缺点是 IAU2000 决议的理论基础 B-K 体系和 DSX 体系都是一个纯粹广义相对论的后牛顿形式，而不是现在运用更广泛的参数化后牛顿 (PPN) 形式。后者涵盖了包括广义相对论在内的各种引力理论。Will 于 20 世纪 70 年代给出 BCRS 参考系下带有 10 个参数的后牛顿形式 [44]，并被 JPL 用于开发其 DE 系列数值历表。广义相对论的多参考系理论被建立起来之后，2000 年 Klioner 和 Soffel [45] 以及 2004 年 Kopeikin 和 Vlasov [46] 都给出了全局系和局部系的参数化后牛顿形式，但是 IAU 需要在这些研究基础上给出相应的决议。另外一个问题是 DSX 体系是一个 1PN 的理论，对于 BCRS，其精度目前已经足够 (Klioner 的相对论天体测量模型理想情况下可达 0.1 微角秒 [38])。但是对于局部系中的天体测量，未来的射电天球参考架精度需要达到微角秒水平，相应的理论模型则要求达到 0.1 微角秒，而目前 GCRS 的 1PN 度规根据数量级估计只能给出 1 微角秒的精度。因此一个 2PN 的度规，特别是 GCRS 度规是需要的。这方面已经开始有一些研究进展，比如 Xu 等人近期给出了 DSX 的全局和局部系度规中空间部分的 2PN 推广 [47]。所以，一个完整的二阶后牛顿或者更进一步二阶参数化后牛顿的天文参考系理论是未来很重要的研究方向。

DSX 体系和 IAU2000 决议中，使用了 B-D 多极矩，但是其对应的球谐展开系数仍然使用牛顿框架下的数值，虽然这样做造成的影响可能很小，但是对理论自洽性而言却是不足的。另外，地球的 B-D 多极矩是在地球质心参考系中定义的，这必然导致其数值随地球自转而产生周期变化，严格地说，不能作为天文常数使用。Tao 和 Huang 首先注意到这个问题，将 DSX 定义的 B-D 多极矩投影到随地球转动的坐标系中，得到了只随时间缓慢变化的量，可以视为天文常数 [33]。接着，Klioner 等人也注意到这个问题，并做了一系列的研究 [48–50]。

DSX 体系和 IAU 相对论参考系的层次划分较少，从 BCRS 直接过渡到 GCRS (或者其他行星的质心系)。这一点已经在实际应用中略显不足，比如，在月球激光测距的理论框架中，无论采用地心系还是日心系都会带来一些因为参考系选择不恰当造成的坐标效应。研究地月系统更加合适的坐标系应该是地月质心系 [51, 52]，但这无法直接从 IAU 参考系体系中得到。因此，建立多层次的天文参考系，从宇宙尺度到银河系质心系，再到 BCRS，过渡到地月

质心系，最后是 GCRS 的完整参考系体系，是很有必要的。

最后一个重要的理论缺点是，DSX 体系和 IAU 决议都是建立在太阳系为孤立引力系统的假设基础上的。这样，银河系的引力，暗物质、暗能量的作用，都完全被忽略不计。随着太阳系质心长期加速度的发现 [53]，这样的假设理论上显然不够完美，实际上对长期的天文观测也是不合适的。因此，如何把银河系的 (包括其他星系以及暗物质) 的引力势纳入到目前的 BCRS 和 GCRS 度规中，是一个很有意思的课题。同样，从完备性角度来说，天文参考系中也应该包含宇宙学常数 (暗能量)[54]。最近，Kopeikin 给出了宇宙尺度的天文参考系，并讨论其中的天体力学和天体测量学 [55, 56]。

最近，美国喷气推进实验室的 Turyshev 和加拿大学者 Toth 提出了一种构造弱场和缓慢运动近似下孤立 N 体系统引力场方程解和动力学的新摄动方法 [57]。在他们的新方法里，对天体的性质和形状与 DSX 体系一样没有限制，引力场方程的解在任意参考架下，由三部分组成：(1) 该参考架的惯性平直时空；(2) 该引力体系中每一个天体在该参考架下的非摄动解；(3) 引力相互作用项。根据该理论，他们同样可以构造全局的和局部的参考系，并能够得到各参考系之间的转换关系。不过，该新方法能否得到进一步的认同和应用，还需要时间观察和检验。另外，我国也有学者正在从事太阳系多参考架理论方面的研究工作。

综上所述，关于相对论天文参考系的理论发展，目前仍然是一个活跃的研究课题，面对实际应用以及不断发展的天文观测技术，仍有许多问题迫切需要解决。相信在不久的将来，这些问题得到系统的解决之后，IAU 会对相对论天文参考系做出一些关键的更新，从而加快决议工程化的实现。

致谢

感谢南京大学黄天衣教授、南京师范大学须重明教授对本工作的支持与帮助。

附录：符号和约定

1. 度规张量号差为 +2，即 $(-,+,+,+)$；
2. 除非特殊声明，c 表示真空中的光速，G 表示牛顿引力常数；
3. α、β、γ、μ、ν、λ 等小写希腊字母表示时空指标，变化范围为 0、1、2、3；
4. a、b、c、i、j、k 等小写拉丁字母表示空间指标，变化范围为 1、2、3；
5. 用大写的拉丁字母表示多重指标，对应的小写字母表示指标的个数，如

$$L \equiv i_1 i_2 \ldots i_l \quad , \quad T_L \equiv T_{i_1 i_2 \ldots i_l} \quad , \quad L-1 \equiv i_1 i_2 \ldots i_{l-1} \quad , \quad T_{L-1} \equiv T_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1}} \quad ;$$

6. 采用 Einstein 求和约定：$S_L T_L \equiv \sum_{i_1 i_2 \ldots i_l} S_{i_1 i_2 \ldots i_l} T_{i_1 i_2 \ldots i_l}$；
7. 任何变量上方的圆点表示该变量对时间求 (偏) 导数；
8. 张量的对称无迹部分 (STF) 表示为：$\hat{T}_L \equiv T_{<L>} \equiv \mathrm{STF}(T_L)$；

9. 对称和反对称张量分别用圆括号和方括号表示：

$$T^{(ij)} \equiv (T^{ij} + T^{ji})/2 \quad , \quad S^{[i}T^{j]} \equiv (S^iT^j - S^jT^i)/2 \quad ;$$

10. δ_{ij} 表示 Kronecker 张量，ϵ_{ijk} 是 Levi-Civita 完全反对称张量密度；

11. $g_{\mu\nu}$ 和 $G_{\alpha\beta}$ 分别表示全局参考系 (太阳系质心参考系 BCRS) 和局部参考系 (地球质心参考系 GCRS) 中的度规张量，(ct, x^i) 和 (cT, X^a) 分别表示相应的时空坐标，采用简写符号：$\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$，$\partial_a \equiv \partial/\partial X^a$；

12. $O(n)$ 表示 $O(c^{-n})$，$A_\mu = O(m,n)$ 表示 $A_0 = O(m)$, $A_i = O(n)$，$B_{\mu\nu} = O(m,n,p)$ 表示 $B_{00} = O(m)$, $B_{0i} = B_{i0} = O(n)$, $B_{ij} = O(p)$，通常 $m,n,p > 0$。

参考文献：

[1] 黄珹. 相对论天体力学与天体测量学 (内部讲义)，上海天文台，2002
[2] 须重明. 自然杂志，2010，32: 288
[3] Murphy T W. Space Science Review, 2009, 148: 217-223
[4] Manchester R N. AIP Conference Proceedings, 2011, 1357: 65
[5] http://smsc.cnes.fr/T2L2/, 2013
[6] Pearlman M, Noll C, Dunn P, et al. Journal of Geodynamics, 2005, 40: 470
[7] Gurtner W, Noomen R, Pearlman M R. Advances in Space Research, 2005, 36: 327
[8] Exertier P, Bonnefond P, Deleflie F, et al. Comptes Rendus Geosciences, 2006, 338: 958
[9] IERS / IVS Working Group. IERS Technical Note, 2009: 35
[10] http://sci.esa.int/gaia, 2013
[11] Brumberg V A, Kopeikin S M. Nuovo Cimento, 1989, 103B: 63
[12] Kopeikin S M. Celes. Mech., 1988, 44: 87
[13] Brumberg V A. Essential Relativistic Celestial Mechanics, Bristol: Adam Hilger, 1991: 15
[14] Damour T, Soffel M, Xu C. Phys. Rev. D, 1991, 43: 3273
[15] Damour T, Soffel M, Xu C. Phys. Rev. D, 1992, 45: 1017
[16] Damour T, Soffel M, Xu C. Phys. Rev. D, 1993, 47: 3214
[17] Damour T, Soffel M, Xu C. Phys. Rev. D, 1994, 49: 618
[18] Soffel M, Klioner S A, Petit G, et al. AJ, 2003, 126: 2687
[19] Pound R V, Rebka Jr G A. Phys. Rev. Lett., 1959, 3 (9): 439
[20] Shapiro I I. Phys. Rev. Lett., 1964, 13 (26): 789
[21] Shapiro I I, Ash M E, Ingalls R P, et al. Phys. Rev. Lett., 1971, 26 (18): 1132
[22] IAU XXIst General Assembly, Resolution, Buenos Aires, Argentina, 1991: A4
[23] Seidelmann P K, Fukushima T. A&A, 1992, 265: 833
[24] Fairhead L, Bretagnon P, Lestrade J-F. Proc. of the the IAU Symposium, 1988, 128: 419
[25] 陶金河. 博士论文，南京：南京大学，1999: 6
[26] Thorne K S. Rev. Mod. Phys., 1980, 52: 299
[27] Blanchet L, Damour T. Ann. Inst. Henri Poincaré A, 1989, 50: 377
[28] Anderle R J. Rev. Geophys. & Space Phys., 1979, 17: 1421
[29] Lerch F J. Rev. Geophys. & Space Phys., 1985, 21: 560
[30] Reigber C, Balmino G, Miiller H, et al. J. Geophys. Res., 1985, 90: 9285
[31] http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_wgs84.html, 2013
[32] Hartmann T, Soffel M H, Kioustelidis T. Celes. Mech., 1994, 60: 139

[33] Tao J H, Huang T Y. A&A, 1998, 333: 1100
[34] Einstein A, Infeld L, Hoffmann B. Annals of Mathematics, 1938, 39: 65
[35] Klioner S A, Vionov A V. Phys. Rev. D, 1993, 48: 1451
[36] Klioner S A, Soffel M. A&A, 1998, 334: 1123
[37] Kopeikin S M. Manuscripta Geod., 1991, 16: 301
[38] Klioner S A. AJ, 2003, 125: 1580
[39] de Felice F, Bucciarelli B, Lattanzi M G, et al. ApJ, 2004, 607: 580
[40] de Felice F, Vecchiato A, Crosta M T, et al. ApJ, 2006, 653: 1552
[41] Crosta M, Vecchiato A. ApJ, 2010, 509: A37
[42] Eubanks T M A. Proc. of the USNO workshop on Relativistic Models for Use in Space Geodesy, Washington, 1991: 60
[43] McCarthy D D, Petit G. IERS Conventions, IERS Technical Report, 2003: 32
[44] Will C M. Theory and experiment in gravitational physics, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993: 86
[45] Klioner S A, Soffel M H. Phys. Rev. D, 2000, 62: 024019
[46] Kopeikin S A, Vlasov I. Phys. Rep., 2004, 400: 209
[47] Xu C, Klioner S A, Soffel M, Wu X. IAU Joint Discussion 7: Space-Time Reference Systems for Future Research at IAU General Assembly, Beijing, 2012
[48] Klioner S A, Soffel M. Proceedings of Journées', Paris: Paris Observatory, 2007: 139
[49] Klioner S A, Soffel M. Proceedings of the "Journées Systèmes de référence spatio-temporels", Soffel M and Capitaine N eds. Lohrmann-Observatorium and Observatoire de Paris Paris, 2008: 3
[50] Klioner S A, Gerlach E, Soffel M. Proc. of the IAU Symposium, 2010, 261: 112
[51] Kopeikin S M, Xie Y. Acta Phys.Slov., 2010, 60: 393
[52] 谢懿. 博士论文，南京：南京大学，2010: 5
[53] Xu M H, Wang G L and Zhao M. A&A, 2012, 544: A135
[54] Kopeikin S M. Proc. of the IAU Symposium, 2009, 261: 7
[55] Kopeikin S M. Phys. Rev. D, 2012, 86: 064004
[56] Kopeikin S M. Phys. Rev. D, 2013, 87: 044029
[57] Turyshev S G, Toth V T. http://arxiv.org/pdf/1304.8122v1.pdf, arXiv:1304.8122, 2013

Review and Prospect of the Relativistic Astronomical Reference System

HAN Wen-biao[1], TAO Jin-he[1], MA Wei[2]

(1. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China; 2. School of Economics and Management, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The International Astronomical Union (IAU) released two important resolutions about the relativistic astronomical reference systems at the year 1991 and 2000 respectively. Especially the resolutions in the year 2000, based on two equivalent theories of multi-reference systems of relativistic N-body system: Brumberg-Kopeikin formalism and Damour-Soffel-Xu formalism, the resolutions constructed theoretically rigorous and consistent local reference system and global reference system with first order post-Newtonian (1PN) level, and gave out the coordinate-transformation rules between the two reference systems. During the more than ten years after the publication of the IAU2000 resolutions, it has begun to be used in some data-processing models of the highly accurate astrometry. But the engineerization of the IAU2000 resolutions is still not widely implemented, especially, there is almost no application of the resolutions to astronomical observations and space explorations in China. Therefore, it is necessary to introduce the IAU's relativistic theory of astronomical references in details. Firstly we introduce the simple resolutions on relativistic reference systems given by IAU in 1991; And the Brumberg-Kopeikin and Damour-Soffel-Xu formalisms are discussed in detail in the chapter 3 and 4; Then, we give out the details of the IAU2000 resolutions about the relativistic reference-system theory. Finally, we try to give some discussions of the engineerization of the IAU2000 resolutions, theoretical progress of the relativistic reference systems in the recent ten years, and prospects for the future.

Key words: celestial mechanics; astrometry; general relativity; astronomical reference system