

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2013.02.06

波江座 α 的快速自转多方球模型

孔大力¹, 王 涛², 寇大治², 刘 敏^{3,4}

(1. Department of Mathematics, University of Exeter, Exeter EX4 4QF, UK; 2. 上海超级计算中心, 上海 201203;
3. 中国科学院 上海天文台, 上海 200030; 4. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 波江座 α 是一颗具有代表性并被比较充分观测的快速自转恒星。以该星为例, 建立了一种可以利用有限的观测数据有效反演此类恒星椭球形状及其内部结构的并行数值方法。求解此问题的经典近似方法(一般)只对慢速旋转的恒星有效, 需要对旋转角速度作小扰动假设; 而该方法为严格数值求解恒星的旋转多方球模型, 对快速旋转的情形仍然保持有效。该方法采用的大规模并行有限元方法, 对超级计算设备的性能与计算方法实现的效率都有很高的需求。计算表明, 如果有限元网格包含数千万单元水平, 则经过充分内存优化的代码在上海超级计算中心曙光 5000A 超级计算机上运行需要不少于 1024 核的资源。

关键词: 并行计算; 有限元方法; 多方球; 快速自转恒星; 波江座 α

中图分类号: P152.3, P138 **文献标识码:** A

1 引 言

在不存在自转或显著潮汐作用的情况下, 绝大多数演化成熟的恒星宏观上处在自引力与压强梯度力的流体静力学平衡状态, 这种平衡会导致恒星具有球对称的密度分布。不同类型的恒星具有差异巨大的内部状态, 然而整体而言, 多方过程可以对这些恒星内的气体进行比较统一的描述。多方气体密度 ρ 与压强 p 的关系由状态方程

$$p = K\rho^{1+1/n} \quad (1)$$

决定。参数 n 称为多方指数, 它是多方过程的核心参数; 而 K 作为一个热力学参数, 它本身是玻尔兹曼常数、气体的平均分子量和某一个内禀温度的函数^[1]。

对于非简并星, 经典的恒星结构理论始于开尔文提出的绝热模型^[2-4]。绝热模型适用于内部对流主导的恒星。绝热过程可以被视为是多方指数 $n = 1/(\gamma - 1)$ 的多方过程, 其中 γ 是理想气体的绝热指数。另外一种极端的情况是爱丁顿最早考虑的辐射平衡模型^[5,6]。在辐射平衡

收稿日期: 2012-12-17; 修回日期: 2013-01-07

资助项目: 上海市科学技术委员会 (1201H116400)

中, 辐射压强远远大于热力学压强, 被认为是气体压强的主要贡献; 辐射平衡模型的多方指数为 3。实际上, 恒星的真实结构介于绝热模型和辐射平衡模型之间, 即一般的多方平衡模型。这样无旋转孤立恒星内部的流体静力学平衡可以用球坐标系下的一维 Lane-Emden 方程描述^[2, 7]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dp}{\rho_0 dr} \right) + 4\pi G \rho_0 = 0 . \quad (2)$$

方程中 r 为径向坐标, G 是万有引力常数, 而 ρ_0 代表无扰动的恒星内部密度分布, 它是 r 的函数。联合式 (1) 可知, 不同的多方指数可以导致具有不同物理表征的径向密度分布^[1, 8, 9]。

然而, 恒星形成过程中角动量守恒造成星体最终总是具有一定程度的自转, 并且普遍存在的双星、多星系统使得恒星会受到伴星产生的潮汐作用的影响。自转和潮汐作用是对 Lane-Emden 方程的两种主要扰动, 这些扰动会造成恒星的形状偏离球形并且内部结构失去球对称的特性。如果不严格考虑密度分布与引力场之间的关系, 自转恒星可以简单地用洛希模型近似^[10]。洛希模型忽略恒星气体包层产生的引力, 认为引力场由位于中央的质点形成; 而气体包层内压强梯度力、引力和旋转离心力三者处于静力学平衡状态。洛希模型非常粗略, 仅仅在外层大气比较符合物理实际, 所以仅用于估算。钱德拉塞卡最早发展出了一种一阶近似方法求解慢自转情况下的受摄 Lane-Emden 方程^[11], 可以得到相应的旋转多方球的椭球形状和密度分布。Martin 在 1970 年将钱德拉塞卡的方法推广到二阶, 从而可以更加准确地处理转速稍快的情况^[12]。对此问题的其他解决方案还包括 Monaghan 和 Roxburgh 提出的双重近似格式 (double approximation scheme)^[13]、Roberts 与 Hurley 提出的变分方法 (variational methods)^[14-17] 以及由 Ostriker 和 Mark 提出并沿用至今的自洽引力场方法 (self-consistent-field methods)^[18, 19]。这些方法都不能严格求解旋转扰动问题——它们都在多方模型之上加入了其他近似条件, 所以当恒星的自转速度很快时, 得到的解与真实解存在很明显的偏差^[20]; 并且在其他扰动因素 (例如较差自转) 存在的情况下这些方法难以被推广。

波江座 α 是一颗典型的具有极高速自转的恒星。作为一颗 B 型主序星, 波江座 α 距离太阳系 44.1 pc^[21]。根据主序星的质光关系, 估算出该星的质量为 $6.07 M_{\odot}$ (1.21×10^{31} kg)^[22]。通过谱线展宽可以确定其赤道处的投影线速度 $V_e \sin i = 225$ km/s^[23]。得益于其较近的距离, 利用高空间分辨率的红外干涉测量, 已经实现了对其进行直接成图观测^[24]。尽管如此, 由于其复杂的星周环境与可能存在的伴星, 其形状仍然相当不确定^[25]。正是因为该星的预期扁率极大 (约 0.3), 各种近似方法均不能有效地求解其内部结构。

笔者在 2012 年第一次实现了一种严格求解快速自转扰动下多方气体自引力平衡方程的数值方法。该方法采用全三维二阶有限元格式, 通过求解正反演混合问题, 可以同时确定旋转多方球的形状和内部密度分布^[20]。在模型中, 我们以最简单的多方指数 $n = 1$ 为例 (可以使力学平衡方程线性化), 最简洁地展示我们对问题的求解流程。对于更加真实的多方指数甚至非多方过程的气体状态方程, 本方法均可适用。

确定多方模型后, 严格求解问题主要面临两个困难: 一是星体的椭球形状参数是需要求解的一个未知量, 然而在有限元方法中它又是必需的已知信息; 二是式 (1) 中的参数 K 同样无法被先验确定。克服这两个困难的途径是反演拟合较精确的观测数据, 例如恒星的质量。

在拟合的过程中, 需要多次求解三维有限元问题, 正是这种迭代拟合过程的计算量非常大, 所以大规模并行计算必不可少。

接下来, 本文以波江座 α 为例, 研究其星体形状与内部密度分布的问题。在第 2 章中, 首先讨论自引力平衡条件下多方气体服从的力学方程和边界条件; 在第 3 章中, 将给出采用的数值方法和计算结果; 最后在第 4 章中进行总结并讨论该方法的应用前景。

2 力学模型

2.1 气体状态方程和静力学平衡方程

考虑一个孤立的多方气体星球围绕 z 轴旋转, 角速度为 $\Omega_0 z$, z 是旋转方向的单位矢量。在这里我们不必要求 Ω_0 很小。由于旋转, 星体的形状是一个扁的旋转椭球。其赤道半径为 R_e , 极半径为 R_p , 偏心率为:

$$\mathcal{E} = \frac{\sqrt{R_e^2 - R_p^2}}{R_e}. \quad (3)$$

由于我们令多方指数 $n = 1$, 故多方气体的状态方程为:

$$p = K\rho^2. \quad (4)$$

在共转坐标系下, 流体静力学平衡方程为如下形式:

$$-\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla V_g - \nabla V_c = 0. \quad (5)$$

V_g 是引力势, V_c 则是离心势。引力势服从泊松方程:

$$\nabla^2 V_g = 4\pi G\rho, \quad (6)$$

而离心势则可以简单表为:

$$V_c = -\frac{1}{2}\Omega_0^2 s^2. \quad (7)$$

其中 s 是空间一点到 z 轴的距离。对式 (5) 取散度, 并联立式 (4)、(6)、(7), 可得到关于密度的线性非齐次亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 \rho + \frac{2\pi G}{K}\rho = \frac{\Omega_0^2}{K}. \quad (8)$$

如果选取赤道半径 R_e 作为特征长度, 星体的总质量 M 作为特征质量, 则对式 (8) 进行无量纲化可得

$$\nabla^2 \rho + \alpha\rho = \beta. \quad (9)$$

其中的无量纲系数为:

$$\alpha = \frac{2\pi GR_e^2}{K}, \quad \beta = \frac{\Omega_0^2 R_e^5}{MK}.$$

由于已经假设星球是孤立的,所以在星球的外表面,压强的边界条件为零,这也隐含了密度的零边界条件。形式上,方程和边界条件给定了数学问题,求解式(9)即可得到密度分布。而事实上,方程的求解区域和热力学参数 K 都是未确定的,因此需要另外两个条件使得整个问题设定。它们是自由等势面条件和质量拟合条件,下面将分别予以讨论。需要特别指出的是,模型中考虑的星体及其边界来自于对物质分布的数学抽象。在实际的观测中,由于辐射转移机制的复杂性,不同波段观测下星体表现的边界与物质分布的实际情况并不能完全一致。

2.2 自由等势面条件

联立式(4)和(5)容易得到

$$\nabla(2K\rho + V_g + V_c) = 0. \quad (10)$$

这等价于

$$2K\rho + V_g + V_c = \text{常数}. \quad (11)$$

在星球表面,由于 $\rho = 0$,我们立刻就可以导出自由等势面条件:

$$V_t \triangleq V_g + V_c = \text{常数}. \quad (12)$$

记星球的自由表面为 \mathcal{S} ,式(12)表明:椭球面 \mathcal{S} 必须是总势 V_t 的一个等势面。这个等势面条件构成对问题的第一个约束,它使得对于给定的热力学参数 K ,恒星的形状,或者说数学上式(9)被定义的区域不再具有任意性。也就是说,偏心率 \mathcal{E} 是 K 的函数。如果可以确定 K 的取值,那么恒星的形状就可以被确定。

2.3 质量拟合条件

除了像波江座 α 这样近距离的亮星以外,极少有恒星能够被成图观测。这使得我们一般无法得到恒星的形状参数 \mathcal{E} ,从而反演重要的状态常数 K 。然而,对于大多数主序星,质光关系可以简单地给出恒星质量的估计值,所以我们的方法旨在找到与恒星观测质量匹配的旋转多方球解。质量约束可以唯一确定常数 K 的取值。

3 数值方法与结果

3.1 两次迭代定解过程

数值上,我们采取两重迭代的方法寻找符合上面提到的所有限制条件的解。基本步骤是对 K 和 \mathcal{E} 分别进行迭代。

第一步,给定 1 个初始的 K 值,这样我们可以得到相应的 α 与 β 。再选取 1 个初始的 \mathcal{E} ,以确定求解区域:

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - \mathcal{E}^2} < 1 \right\}, \quad (13)$$

以及边界:

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - \mathcal{E}^2} = 1 \right\}. \quad (14)$$

随后, 利用三维有限元方法, 在区域 \mathcal{D} 中求解式 (9)。有限元方法采用二阶十点四面体单元对椭球区域进行三角剖分。图 1 展示了一个完整的有限元网格以及网格内一个典型单元的格式。在式 (9) 两边同时乘以任意满足零边界条件的检验函数 w_ρ 后在整个区域积分, 再利用分部积分公式处理二阶导数项, 最终我们得到方程的弱形式:

$$\int_{\mathcal{D}} -\nabla \rho \cdot \nabla w_\rho dV + \alpha \int_{\mathcal{D}} \rho w_\rho dV = \beta \int_{\mathcal{D}} w_\rho dV . \quad (15)$$

在推导中, 由于零边界条件, 边界积分项自动被消除。在每一个单元内, 我们用插值公式近似 ρ :

$$\rho = \sum_{j=1}^{10} \rho_j \Phi_j . \quad (16)$$

ρ_j 就是密度 ρ 在第 j 个节点上的取值, 也就是我们需要求解的未知数, 而 Φ_j 是如下定义的二阶插值多项式:

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1(2L_1 - 1), & \Phi_2 = L_2(2L_2 - 1), \\ \Phi_3 = L_3(2L_3 - 1), & \Phi_4 = L_4(2L_4 - 1), \\ \Phi_5 = 4L_1L_2, & \Phi_6 = 4L_1L_3, & \Phi_7 = 4L_1L_4, \\ \Phi_8 = 4L_2L_3, & \Phi_9 = 4L_2L_4, & \Phi_{10} = 4L_3L_4, \end{cases} \quad (17)$$

其中 L_j ($j = 1, 2, 3, 4$) 是单元中的体积坐标^[26]。本文采用的 Galerkin 有限元方法就是将网格中所有 N 个节点上定义的插值函数的集合作为检验函数空间。这样便可以从式 (15) 导出关于所有 ρ_n 线性代数方程组:

$$\sum_{n=1}^N \left(\int_{\mathcal{D}} -\nabla \Phi_m \cdot \nabla \Phi_n + \alpha \Phi_m \Phi_n dV \right) \rho_n = \int_{\mathcal{D}} \beta \Phi_m dV, m = 1, 2, 3, \dots, N . \quad (18)$$

在实际计算中, 出于精度需要, 网格内一般包含数千万单元^[20]。采用标准的 Krylov 子空间方法可以高效求解最终得到的大规模稀疏线性方程组。

第二步, 保持 K 不变, 我们需要迭代调整 \mathcal{E} 使得自由等势面条件得到满足。从计算的角度看, 式 (12) 等价于

$$(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \nabla V_t = 0 . \quad (19)$$

其中 \mathbf{I} 是二阶 3×3 单位张量, \mathbf{n} 则是区域表面 \mathcal{S} 上的单位法向量, \otimes 为并矢运算符号。如果旋转椭球形状严格符合物理实际, 那么式 (19) 在数学上就会严格成立。而实际上, 除了少数极为特殊的密度分布状态以外, 旋转流体的形状并不是严格的旋转椭球, 尽管这种偏差极小^[27]。这样的现实情况使得我们不可能要求等式 (19) 严格达到, 而只能要求数值解满足极小化条件:

$$\min_{0 < \mathcal{E} < 1} \mathbf{P} \cdot \nabla V_t , \quad (20)$$

其中,

$$\mathbf{P} \triangleq \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (21)$$

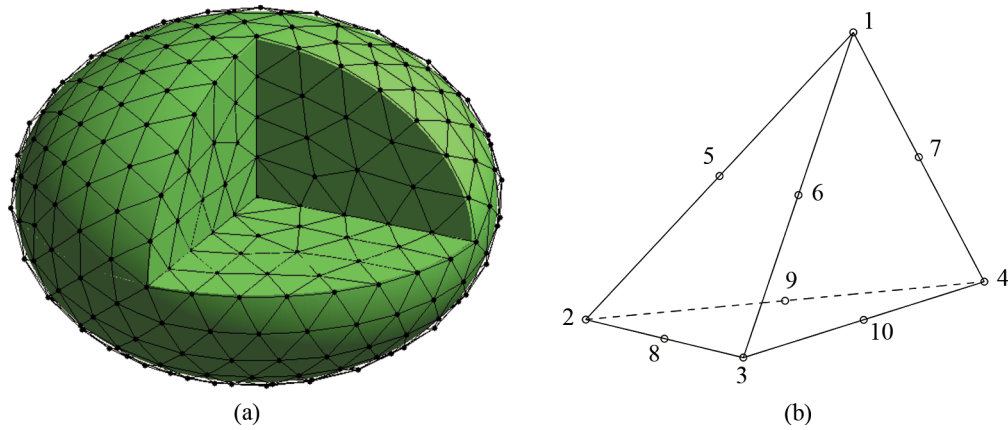


图 1 (a) 有限元网格生成示意图; (b) 一个四面体单元及单元内节点编号示意

是切向投影算符。

第三步,在一定范围内遍历 K 的取值。对每一个取到的 K 值,都重复第一和第二个步骤,以找到符合自由等势面条件的解。对 K 的搜索目标是满足等式

$$\int_{\mathcal{D}} \rho dV = 1. \quad (22)$$

式 (22) 是质量拟合条件的无量纲形式。

在完成这三个求解步骤之后,我们就可以唯一地求出模型恒星的形状和内部密度分布,并使得模型恒星具有与真实恒星相同的质量。整个过程需要反复多次求解超大规模有限元问题,大规模并行计算资源是完成这项工作的必备条件。上海超级计算中心的“用户资源倍增计划”为较高强度的计算资源使用提供了稳定的保障。

3.2 并行计算技术

计算代码由 C++ 语言编写,采用 MPI 并行体制,使用并行库 ParMetis^[28] 对有限元网格进行优化,线性方程组的求解充分融合了并行工具库 PETSc^[29]。算法的核心部分是三维有限元格式的实现^[30],而计算工作依托上海超级计算中心曙光 5000 A 资源。为了适应分布式内存架构,原有的代码经过较大的调整。在 1024 核,4 TB 内存的用户可用资源上限以内,可以有效完成包含 6400 万单元网格的计算。实算中发现,对于超过 1 亿单元的网格,在有限元网格预处理阶段出现内存资源瓶颈。即使对内存负载进行充分地平衡,在主从并行模式下,主节点的内存需求仍然无法被充分满足。这导致程序运行不稳定,主节点极易宕机。

3.3 数值结果

我们通过人工构造解析解和右端项的方式对计算程序进行精度与收敛性的检验^[30];另外还尝试求解了慢速旋转的多方球问题,其结果与钱德拉塞卡的近似解吻合得极好^[20],这证实了计算程序的可靠性和准确性。

Carciofi 等人^[25]在考虑更复杂星周环境的前提下重新处理了 Domiciano de Souza 等人^[24]对波江座 α 的干涉测量数据,并得到了 6 个拟合模型,其中第四个模型可以最好地拟合

测光数据, 我们因此采纳该模型的几个参数。在这个模型里, 波江座 α 的赤道半径被拟合为 $10.2 R_{\odot}$ ($R_e = 7.10 \times 10^6 \text{ km}$), 而自转轴相对于观测视线方向的倾角为 $i = 65^\circ$ 。结合在引言中介绍的质量和自转线速度的数据, 计算得该星的自转角速度为 $\Omega_0 = 3.493 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 。

在仅有质量与自转角速度数据的情况下, 我们可以利用前面描述的方法挖掘出恒星内部丰富的信息。使用包含 6400 万单元的有限元网格进行高精度计算, 结果表明在多方指数 $n = 1$ 的假设下, 描述波江座 α 内部的最优状态方程为:

$$p = 1.8241 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \rho^2 . \quad (23)$$

图 2 展示了使用质量拟合条件确定热力学参数 K 的具体情况。同时得到星体形状的偏心率为 $\mathcal{E} = 0.722$, 与之对应的扁率为 $f = 0.308$, 即 $R_e/R_p = 1.45$ 。这与 Carciofi 等人通过测光数据拟合的形状参数 $R_e/R_p = 1.4$ 非常吻合^[25]。本方法还第一次估计出对波江座 α 内部密度结构。图 3 给出了在恒星赤道面内密度和压强随半径变化的曲线。

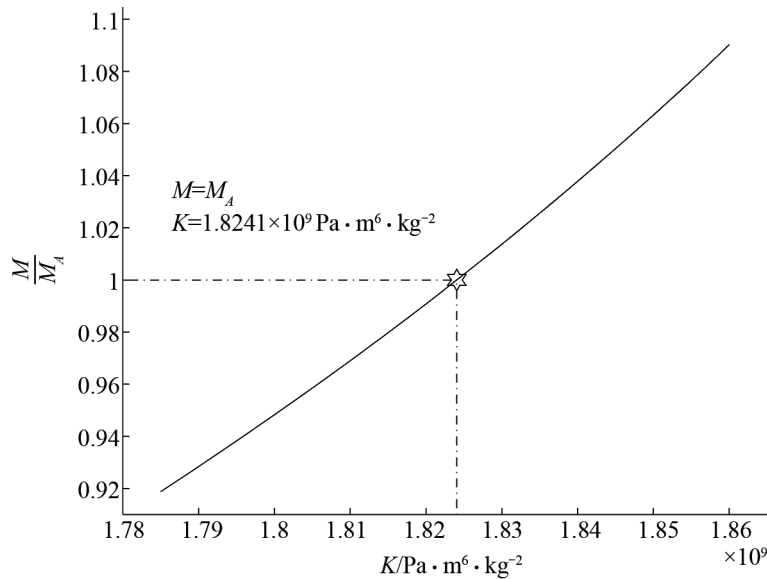


图 2 利用质量拟合条件对热力学参数 K 的遍历过程

实线表示模型所具有的质量与 K 的关系星形标记标示出当 $K = K_A = 1.8241 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{kg}^{-2}$ 时, 模型的质量恰好可以匹配恒星的观测质量 M_A 。

众所周知, 在旋转对称的恒星外部, 引力场可以在球坐标系 (r, θ, Φ) 中展开为勒让德多项式形式:

$$V_g(r, \theta) = -\frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k} \left(\frac{R_e}{r} \right)^{2k} P_{2k}(\cos \theta) \right], \quad r \geq R_e . \quad (24)$$

J_2, J_4, J_6, \dots 称为引力场的带谐系数。表 1 给出了根据计算结果推导的波江座 α 引力场的带谐系数。

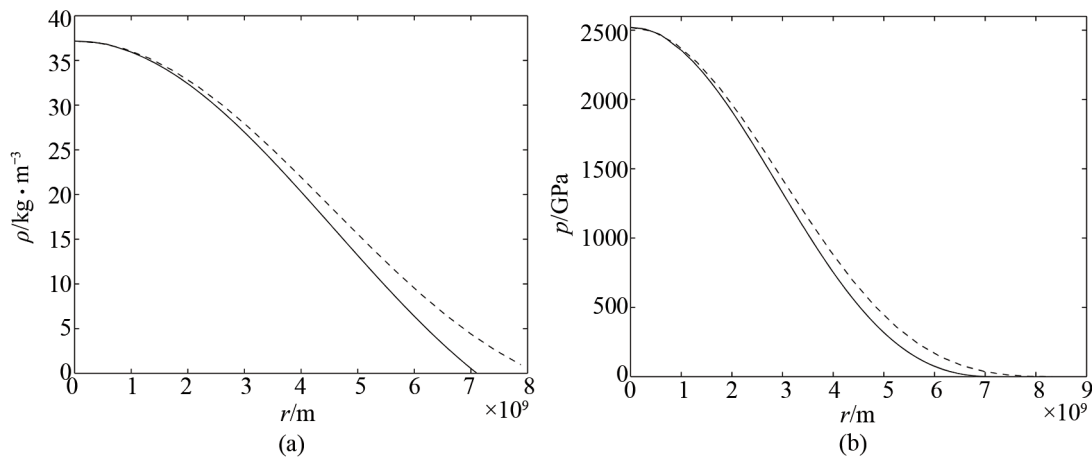


图3 波江座 α 内部密度分布的数值模型

(a) 是密度随半径的变化; (b) 是压强随半径的变化。两条曲线取值均在恒星的赤道平面内。两图中的虚线均表示钱德拉塞卡近似方法给出的相应密度与压强的分布。可以看到, 对于快速自转的恒星, 近似方法的误差很大。

表1 波江座 α 星外引力场带谐系数

n	2	4	6	8	10	12	14	16
$J_n \times 10^6$	63 143.00	-9860.30	2171.30	-578.33	174.04	-57.02	19.89	-7.28

洛希模型只能给出对形状的估计, 而无法可靠地计算恒星内部的结构, 更无法引申到恒星的引力场。其他对旋转扰动进行近似的模型虽然对恒星内部结构具有一定的估计能力, 但对于波江座 α 这种极快速旋转甚至逼近解体极限 ($R_e/R_p = 1.5$)^[24, 25] 的情况, 却无法得到令人满意的近似结果。相比之下, 本文的数值直接求解方法具有充分的准确性和普适性。

4 总结和展望

本文利用三维有限元方法和并行计算技术, 实现了对快速自转恒星波江座 α 的建模, 讨论了多方指数 $n = 1$ 时的求解过程和计算结果。由于波江座 α 属于早型星, 其内部辐射压强较强, 因此实际的多方指数应当大于1。式(8)将不再是线性方程, 但本方法依然可以采用牛顿迭代等方法来求解随之产生的非线性方程, 而整个问题求解的框架不变。如果采用更加真实的状态方程, 将得到更加准确的结果, 这是我们的后续工作之一。本文的旋转多方球模型仅含有多方指数这一个可调参数, 其简洁性是现有其他模型所不具备的; 而同时, 本文采用的求解方法是最严格普适的, 没有其他方法在数学手段层面的局限性。波江座 α 据信拥有一个伴星^[31]。由于有限元方法对任意几何形状有非常优异的适应性, 因此本方法可以毫无障碍地被推广到包含伴星潮汐作用的场合。恒星包层受到潮汐引力和快速旋转的共同影响, 其产

生的形变可以被准确地计算。这使得我们第一次拥有在严格考虑各种外界条件的情况下准确计算恒星结构的能力。最后, 本方法可以毫无障碍地处理诸如较差自转带来的附加扰动等一些恒星内部复杂过程。

由于旋转对称引力场的带谐展开式 (24) 中高阶带谐系数衰减很快, 需要足够的数值精度才能保证高阶展开系数值的可靠性。这要求有限元问题求解中使用包含大量单元的网格以确保对小尺度密度分布结构的解析度。表 (1) 中报告的结果由包含 6400 万单元的网格得到。在未来的工作中, 预期将需要更大的网格支持计算。当网格内单元数量超过 1 亿后, 在上海超算 Magic Cube 上稳定运行整个程序还需要更多软件层面的优化与硬件资源使用量的提升。这集中体现了三维高精度偏微分方程数值求解对超大规模计算资源的高要求。

从计算数学角度看, 有限元方法在求解亥姆霍兹方程这类定态波动方程时精度和收敛性与解的后验性质有很大的关系。如果求解区域不规则, 或方程的解预期存在高波数的结构, 则经典 Galerkin 有限元方法可能较大地偏离理论精度收敛阶数。这个问题会加剧计算资源的消耗, 同时影响结果的可靠性。在对较差自转问题的一些初步探索中, 我们发现, 最小二乘 Galerkin 有限元方法 (Galerkin-least-squares finite element method)^[32] 可以显著地提高数值解对具有高波数的真实解的逼近精度。而目前对三维不规则几何形状与不规则网格情况, 该方法的数学理论仍然是计算数学领域的空白。我们将以今后的工作为契机, 对此开展更加深入的研究。

致谢

感谢中国科学院上海天文台李力刚研究员的宝贵意见。

参考文献:

- [1] Chandrasekhar S. An Introduction to the Study of Stellar Structure, New York: Courier Dover Publications, 1967: 86
- [2] Lane J H. Amer. J. Sci., 1870, 50: 57
- [3] Ritter A. Wiedemann Annalen, 1878, 6: 135
- [4] Thomson W. Phil. Mag., 1887, 22: 287
- [5] Eddington A S. MNRAS, 1916, 77: 16
- [6] Eddington A S. MNRAS, 1917, 77: 596
- [7] Horedt G P. A&A, 1987, 177: 117
- [8] Eddington A S. The Internal Constitution of the Stars, Cambridge: Cambridge University Press, 1926
- [9] Chandrasekhar S. APS, 1939, 81: 153
- [10] Tassoul J. Theory of rotating stars, Princeton: Princeton Univ. Press, 1978: 221
- [11] Chandrasekhar S. MNRAS, 1933, 93: 390
- [12] Martin P G. Ap&SS, 1970, 7: 119
- [13] Monaghan J J, Roxburgh I W. MNRAS, 1965, 131: 13
- [14] Roberts P H. ApJ, 1963, 137: 1129
- [15] Roberts P H. ApJ, 1963, 138: 809
- [16] Hurley M, Roberts P H. ApJ, 1964, 140: 583
- [17] Hurley M, Roberts P H. ApJS, 1965, 11: 95

- [18] Ostriker J P, Mark J W-K. *AJ*, 1968, 151: 1075
- [19] Sirotkin F V, Kim W-T. *AJ*, 2009, 698: 715
- [20] Kong D, Zhang K, Schubert G, Anderson J. *ApJ*, 2013, 763: 116
- [21] Peryman M A C, Lindegren L, Kovalevsky J, et al. *A&A*, 1997, 323: L49
- [22] Harmanec P. *Bull. Astron. Inst. Czechoslovakia*, 1988, 39: 329
- [23] Slettebak A. *ApJ*, 1982, 50: 55
- [24] Domiciano de Souza A, Kervella P, Jankov S, et al. *A&A*, 2003, 407: L47
- [25] Carciofi A C, Domiciano de Souza A, Magalhaes A M, et al. *AJ*, 2008, 676: L41
- [26] Wachspress E L. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1981, 17: 735
- [27] Kong D, Zhang K, Schubert G. *JGR*, 2010, 115: E1203
- [28] Karypis G, Schloegel K, Kumar V. *PARMETIS: Parallel graph partitioning and sparse matrix ordering library*, Technical Report. Minnesota: University of Minnesota, 1997: 57
- [29] Balay S, Brown J, Buschelman K, et al. *PETSc Users Manual*, Technical Report, Argonne: Argonne National Laboratory, 2012
- [30] Kong D. *Analytical and Numerical Studies of Several Fluid Mechanical Problems*, PhD Thesis. Exeter: University of Exeter, 2012: 125
- [31] Kervella P, Domiciano de Souza A. *A&A*, 2007, 474: L49
- [32] Thompson L L, Pinsky P M. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, 38: 371

A Polytropic Model of Rapidly Rotating α Eri

KONG Da-li¹, WANG Tao², KOU Da-zhi², LIU Min^{3,4}

(1. Department of Mathematics, University of Exeter, Exeter EX4 4QF, UK; 2. Shanghai Supercomputing Center, Shanghai 201203, China; 3. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China; 4. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: We present a three-dimensional numerical method for calculating the non-spherical shape and internal structure of a model of a rapidly rotating gaseous body with a polytropic index unity. The calculation is based on a finite element method and accounts for the full effects of rotation. We apply it to a model of a rapidly rotating, highly flattened star (α Eridani). The distributions of density and pressure are determined via a hybrid inverse approach by adjusting a priori unknown coefficient in the equation of state (EOS) until the model mass matches the observed mass of the star. The numerical method, implemented as a 3D finite element scheme, relies on massively parallel computing facilities. On the Dawning 5000A machine in Shanghai Supercomputer Center (SSC), we utilized typically 1024 cores to carry out our calculations effectively. The model and numerical method are both ready to be generalized to include various physical features and processes such as differential rotation, tidal effects and more realistic EOS of gaseous configurations.

Key words: parallel computing; finite element method; polytrope; rapidly rotating star; α Eri