

文章编号: 1000-8349(2009)02-0174-09



三角平动点在深空探测中的应用前景

刘 林^{1,2}, 侯锡云^{1,2}

(1. 南京大学 天文系, 南京 210093; 2. 南京大学 空间环境与航天动力学研究所, 南京 210093)

摘要: 与共线平动点不同, 圆型限制性三体问题中的两个三角平动点在一定条件下, 无论是线性意义下还是非线性意义下, 都是稳定的, 其附近存在着周期与拟周期轨道, 在深空探测中有应用前景。该文首先简单介绍三角平动点附近运动的动力学特征, 然后以日-(地+月)系和地-月系两个三体系统为例, 进一步阐述真实引力模型下三角平动点附近的运动状态, 最后以这两个三体系统为例, 探讨了三角平动点探测器的发射和定点轨道控制问题。

关键词: 圆型限制性三体问题; 三角平动点; 周期轨道; 共线平动点; 不变流形

中图分类号: P132+.2 **文献标识码:** A

1 引 言

限制性三体问题是研究一个质量可忽略的小天体在两个相互绕转的大天体(称之为主天体)的引力作用下的运动状态, 它是三体问题的一种退化情形(小天体质量可忽略)。当两个主天体的轨道为圆轨道时, 该问题即为圆型限制性三体问题。通常在随两个主天体共同绕转的坐标系中研究小天体的运动, 该坐标系称为会合坐标系, 坐标系的原点取为两个主天体的质心, 如图 1 所示。

图 1 中, P_1, P_2 为主天体, C 为该系统的质心, $x-y$ 平面为两个大天体的运动平面。 P 为小天体。在会合坐标系中, 小天体的运动方程为:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}} + 2(-\dot{y}, \dot{x}, 0)^T = (\partial\Omega/\partial\mathbf{r})^T \\ \Omega = (x^2 + y^2)/2 + (1 + \mu)/r_1 + \mu/r_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$, m_1 和 m_2 分别为主天体 P_1 和 P_2 的质量, $m_1 > m_2$, 长度单位是两个大天体之间的距离。该系统存在一个动力学积分, 称为 Jacobi 积分, 形式如下^[1]:

$$2\Omega - v^2 = 2\Omega - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = C \quad (2)$$

收稿日期: 2008-05-04; 修回日期: 2008-07-04

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (10673006)

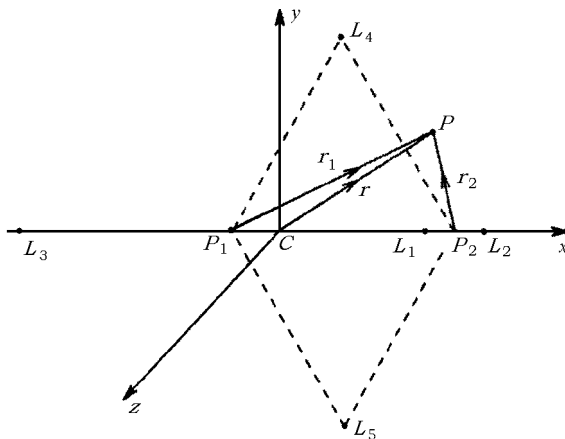


图 1 会合坐标系及 5 个平动点 $L_i (i = 1, 2, \dots, 5)$

其中积分常数 C 称为 Jacobi 常数, 该积分在小天体运动的定性研究中十分重要。

式 (1) 存在 5 个平衡解, 它们在会合坐标系中的位置如图 1 所示, 其中 L_1, L_2, L_3 在两个大天体的连线上, 称为共线平动点; L_4, L_5 在与两个大天体成等边三角形的位置上, 称为三角平动点。共线平动点是不稳定的, 但在其附近存在条件稳定的周期与拟周期轨道, 这些点的不稳定性及条件稳定性在深空探测中有着越来越多的应用^[2~4]; 而三角平动点是稳定的, 其附近充斥着周期和拟周期轨道, 这在深空探测中是否具有应用前景? 为此, 必须深入了解这类平动点附近的动力学特征。长期以来, 人们对三角平动点的关注偏重于理论研究, 然而相对两个主天体不变的几何构型和稳定的动力学特征, 对它们在实际作用力模型下会发生什么变化、在深空探测中是否有利用价值等问题, 人们的研究不多。本文根据已有的结果结合笔者的工作, 基于稳定性的特征以及其附近周期轨道的存在状况, 对三角平动点的应用前景作一综述。

2 三角平动点附近的周期轨道族与拟周期轨道

研究三角平动点附近的动力学特征时, 人们习惯于将坐标原点从质心 C 平移到三角平动点上 (L_4 或 L_5 , 文中如无特别说明, 总以 L_4 为例), 记小天体相对 L_4 的坐标为 (ξ, η, ζ) , 注意到 $\Omega_{xz}^0 = \Omega_{yz}^0 = 0$ (其中 Ω_{**}^0 的下标表示函数 Ω 对该坐标求导, 上标 0 表示在 L_4 处的取值), 则 L_4 附近线性化运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \Omega_{xx}^0 \xi + \Omega_{xy}^0 \eta \\ \ddot{\eta} - 2\dot{\xi} = \Omega_{yx}^0 \xi + \Omega_{yy}^0 \eta \\ \ddot{\zeta} = \Omega_{zz}^0 \zeta \end{cases} \quad (3)$$

显然, z 方向的运动为一简谐振动, 频率为 $\omega_z = \sqrt{-\Omega_{zz}^0} (= 1)$, 它与 $x-y$ 平面内的运动是可分离的。由于 z 方向的运动始终是稳定的, 通常人们关心的是 $x-y$ 平面内的运动。注意到

$$\Omega_{xx}^0 = \frac{3}{4}, \quad \Omega_{xy}^0 = \Omega_{yx}^0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} - \mu \right), \quad \Omega_{yy}^0 = \frac{9}{4} \quad (4)$$

则 $x-y$ 平面内的运动的特征值 (分别记为 λ_1 和 λ_2) 满足:

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{2} \left[-1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} \right], \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} \right] \quad (5)$$

显然, 当 $\mu < \mu_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{69}/9 \right] \approx 0.03852 \dots$ 时, λ_1 、 λ_2 均为纯虚数, 这表明 L_4 附近的运动是线性稳定的, μ_1 称为 Routh 极限。当 $\mu = \mu_1$ 时, $\lambda_1 = \lambda_2$, 解中将出现线性发散项, 因此运动是不稳定的。当 $\mu > \mu_1$ 时, λ_1, λ_2 不再为纯虚数, 解中将出现指数发散项, 因此运动亦是不稳定的。对太阳系中绝大多数三体系统而言, μ 都小于 μ_1 。当然, 上述稳定性结论仅是基于线性化模型的结果, 当考虑非线性项的影响时, 除了有限的几个值, 当 $\mu < \mu_1$ 时三角平动点仍旧是稳定的, 相关工作参见文献 [5]。

当 $\mu < \mu_1$ 时, $|\lambda_1| > \sqrt{2}/2 > |\lambda_2|$, $x-y$ 平面内存在两族周期轨道, 它们的频率即为 $|\lambda_1|$ 与 $|\lambda_2|$ 。通常称周期较大的周期轨道族为长周期轨道族, (对应频率较小的 $|\lambda_2|$ 一族), 而另一族周期较小 (即频率较小的 $|\lambda_1|$) 的为短周期轨道族。记 ω_1, ω_s 为这两族轨道的本征频率, 即 $\omega_s = |\lambda_1|, \omega_1 = |\lambda_2|$ 。因此三角平动点附近有 3 个本征频率, 分别为 $x-y$ 平面内的 ω_1, ω_s 与 z 方向的 ω_z , 对应 3 个周期轨道族, 分别为 $x-y$ 平面内的长短周期轨道族以及对应 ω_z 的垂直周期轨道族。与 $x-y$ 平面内的周期轨道族不同, 垂直周期轨道族成员的运动并不限于 z 轴一个方向上的一维运动, 它们是三维空间中的周期轨道。虽然该族轨道的极限情形为 z 方向无穷小的振动, 但对有限振幅的周期轨道而言, 仅在 z 轴上运动是不可能的。关于垂直周期轨道族的研究, 相关工作可参见文献 [6, 7]。

在 0 与 μ_1 之间存在一些特殊的 μ 值, 记为 μ_k ,

$$\mu_k = \frac{1}{2} \left[1 - \left(k^4 + 38k^2 / 27 + 1 \right)^{1/2} / \left(k^2 + 1 \right) \right] \quad (6)$$

k 为有理数。当 $\mu = \mu_k$ 时, ω_1, ω_s 成简单整数比, 此时结论将发生变化, $x-y$ 平面内从 L_4 点生发出的周期轨道族可能仅有一族, 亦可能多于两族 [8]。虽然对某些特殊的 μ 值 $\mu'_k, \omega_1, \omega_s$ 亦可能同 ω_z 成整数比 [7], 但此时并不存在周期轨道族简并或者增多的情形, 因为线性情形下 (可以理解为无穷小振幅的周期轨道), z 方向的运动同 $x-y$ 平面内的运动是分离的。在长短周期轨道族的成员之间, 存在着一些周期轨道族连接着它们 [9,10], 这些周期轨道族通常被称为“桥梁”。当 μ 越过临界值 μ_k 时, 桥梁的结构会发生变化。在长短周期轨道族与垂直周期轨道族之间, 亦存在着一些“桥梁”连接着它们, 当 μ 越过临界值 μ'_k 时, 桥梁的结构亦会发生变化 [7]。长短周期轨道族、垂直周期轨道族及连接它们的这些桥梁的演化细节不是本文要介绍的内容, 有兴趣的读者可参见相关文献。

一般而言, $\omega_1, \omega_s, \omega_z$ 并不通约, 因此, 三角平动点附近充斥着围绕它的拟周期轨道。除此之外, 稳定的周期轨道附近亦存在拟周期轨道 [11]。因此, 在三角平动点附近, 对应任意初始条件的运动, 除特殊状态 (指周期轨道) 外, 都是拟周期运动。这些拟周期运动即具有上述三种频率, 由于 z 方向的运动始终是稳定的, 因此关于这些拟周期轨道的稳定性研究主要是针对 $x-y$ 平面内的运动。研究表明, 只有当振幅非常小时长周期轨道才是稳定的, 而短周期轨道即使在振幅较大时亦是稳定的, 当有第四体 (或其他力源) 存在时, 长周期运动分量很快呈现“发散”状态。因此, 如果要选取相应的拟周期轨道作为探测器定点在三角平动点附近的目标轨道, 应该尽量消除其中的长周期运动分量, 这与保持共线平动点达到条件稳定而消除其

中的指数发散分量类似^[3]。在线性化模型下, 可以给出消除长周期运动分量的分析表达式, 见下面的介绍。

式(3)的解(z 方向为简单的简谐振动, 这里不再给出)如下:

$$\begin{cases} \xi = C_1 \cos \omega_1 t + S_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_2 t + S_2 \sin \omega_2 t \\ \eta = \bar{C}_1 \cos \omega_1 t + \bar{S}_1 \sin \omega_1 t + \bar{C}_2 \cos \omega_2 t + \bar{S}_2 \sin \omega_2 t \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\omega_1 = \omega_l, \omega_2 = \omega_s$, 即对应前面所说的长、短周期轨道族的本征频率, C_i, S_i 和 $\bar{C}_i, \bar{S}_i (i = 1, 2)$ 为由初始条件 $\xi_0, \eta_0, \dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0$ 确定的积分常数。

为了消除运动中的长周期分量, 要使 $C_1 = S_1 = 0$, 对应的初始条件为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_0 = \frac{\Gamma_2 \Omega_{xy}^0 \xi_0 + \eta_0}{2\Gamma_2} \\ \dot{\eta}_0 = -\frac{(\omega_2^2 + \Omega_{xx}^0) \xi_0 + \Omega_{xy}^0 \eta_0}{2} \end{cases} \quad (8)$$

速度的偏离量 $\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0$ 将由位置的偏离量 ξ_0, η_0 确定。该条件可用来作为探测器定点在三角平动点附近的轨控依据。

对于圆型限制性三体问题模型, 要给出考虑高次项影响的消除长周期运动分量的解析表达式较困难, 同时亦无必要, 因为真实运动模型与圆型限制性三体问题模型相比存在很多摄动因素, 这些摄动因素的量级与忽略掉的高次项的量级相当, 仅仅考虑圆型限制性三体问题模型下的高次项修正, 并无实际意义, 同时过于复杂的条件表达式会给控制造成一定的困难。

当 μ 值非常小时, $\omega_l \rightarrow 0, \omega_s \rightarrow 1$, 例如日-(地+月)系统, $\mu = 3 \times 10^{-6}$, 相应的两个本征频率 $\omega_l = 2 \times 10^{-5} \approx 0, \omega_s = 0.99998 = O(1)$, 这导致 ω_s 与 $\omega_z = 1$ 非常接近, 就短周期轨道而言, 所选择的目标轨道就像是周期轨道, 尽管它们实际上是拟周期轨道。

3 稳定性分析

由上述讨论可知, 当 $\mu < \mu_1$ 时, 圆型限制性三体问题的三角平动点是稳定的。一般而言, 稳定区域随着 μ 的增长而增长^[12], 但在 μ_2, μ_3 处为 0, 对于圆型限制性三体问题稳定性及稳定区域的讨论, 可参见文献 [13]。

真实力模型与圆型限制性三体问题模型毕竟是有差别的, 例如地-月系统, 它与圆型限制性三体问题模型相比, 主要有两点不同, 一是两个主天体的轨道是椭圆轨道而并非圆轨道, 二是存在其他大天体(如太阳)的引力摄动。已有的工作表明, 在椭圆型限制性三体问题中, 三角平动点在 $\mu < \mu_1$ 条件下仍是稳定的^[14,15], 数值模拟计算结果也表明了这一现象, 但其稳定状态与第三体摄动紧密相关。然而, 这涉及到结构稳定性问题, 尚无理论上严格解决这类问题的方法, 因此数值方法往往就成为研究这类稳定性通常采用的手段。本文也采用了同样的手段, 对日-(地+月)系和地-月系, 作了相应的探讨, 下面具体介绍研究工作的基本概况和结果。

在 $P_1 L_4$ 的延线上选取一点, 以这一点到 L_4 的距离 λ 作为该点所在轨道的初始振幅(即相对三角平动点的初始位置偏离, 注意, 偏离量的单位是两个大天体之间的距离)。该点的初始速度选为零, 在一定力模型下用数值方法给出该点的运动轨道, 如果该条轨道可以长时间

维持在三角平动点附近, 就认为三角平动点是稳定的; 如果该条轨道很快发散, 则认为三角平动点是不稳定的。

日-(地+月)系考虑了地月系质心及其他摄动大行星的轨道偏心率, 同时积分小天体、太阳、地月系质心及主要摄动天体(木星、土星、火星、金星)的轨道。假设大行星及地月系的轨道在同一平面内(忽略了相应的小倾角影响), 其初始相位随机给出。计算表明, 当初始振幅较小时, 小天体虽然会运行到离三角平动点较远的地方, 但总体而言, 它可以围绕三角平动点运动很长时间而不离去, 如图 2(a) 所示 ($\lambda = 1 \times 10^{-4}$)。图中轨道为会合坐标系中的图像(下面如无特别说明, 轨道均在会合坐标系中给出), 积分时间为 1×10^4 倍地月系质心的公转周期。然而, 当初始振幅稍大时 ($\lambda = 1 \times 10^{-3}$), 小天体就会逐渐远离三角平动点, 如图 2(b) 所示, 这一远离三角平动点的轨道漂移现象与日-(地+月)系的 μ 值较小有关。日-木系的稳定性比日-(地+月)系强, 该系统的 μ 值较大 (10^{-3}), 其他大行星的摄动作用不强, 这正是 Trojan 小行星群长期存在的重要原因之一。

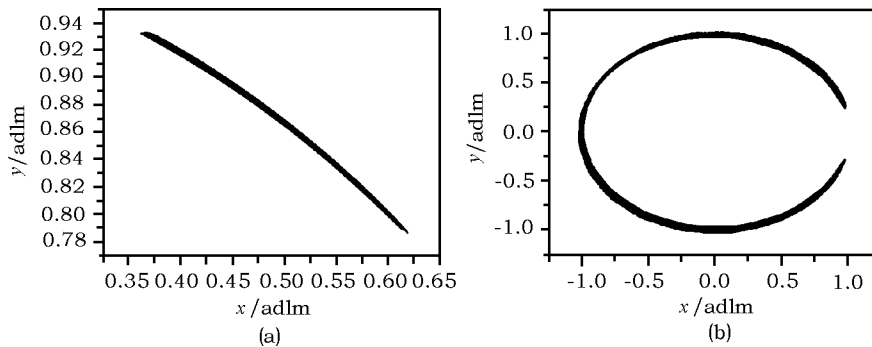


图 2 (a) 为-(地+月)系三角平动点附近一条可长期维持在三角平动点附近的轨道;
(b) 为一条不能长期维持的轨道, 积分时间为 1×10^4 倍地月系质心的公转周期

地-月系考虑了月球的轨道偏心率, 同时积分小天体、地球、月球和主要摄动天体太阳的轨道。太阳和月球的轨道在同一平面内(忽略了黄白交角的影响), 其初始相位随机给出。计算表明, 地-月系的三角平动点在太阳的引力摄动下是不稳定的, 如图 3(a) 所示 ($\lambda = 1 \times 10^{-4}$), 积分时间为 1×10^2 倍月球的公转周期。对于地-月系, 即使初始位置偏离量 λ 较小, 轨道仍明显发散, 在 1×10^2 倍月球公转周期这一不长的时间内(不到 10 a), 小天体已远离三角平动点。虽然地-月系 μ 值较大, 其对应的限制性三体问题的三角平动点附近的稳定范围应该较大, 但实际运动状态并非如此, 这就是由于第四体太阳引力摄动的存在。如果将太阳的质量人为地减小 1 个量级, 采用同图 3(a) 相同的条件, 积分相同时间, 轨道不会发散, 小天体仍然保持在三角平动点 L_4 周围, 如图 3(b) 所示。

本文所谓的真实力模型虽然与实际力模型仍有差别(未考虑所有摄动天体以及同一轨道平面的假设), 但主要摄动因素(轨道偏心率、起主要作用的摄动天体引力)都已考虑, 因此该力模型得出的结果应能反映实际力模型下的结果。事实上, 笔者已考虑过完整的太阳系力模型(包括太阳、八大行星和月球, 大行星和月球的轨道由分析历表给出), 也得出了相同的结论。

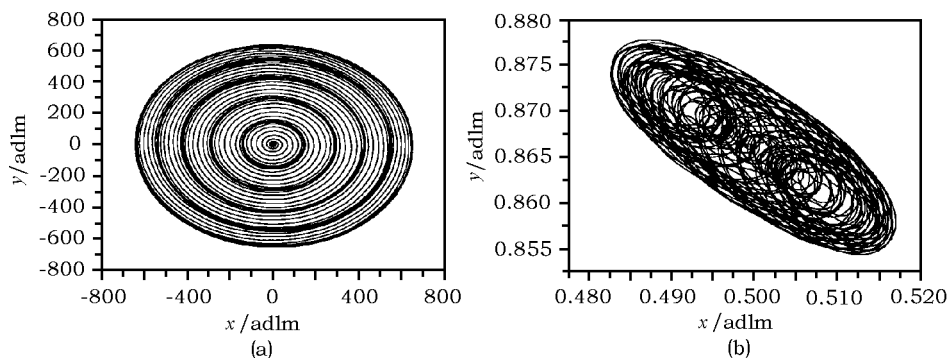


图 3 地-月系三角平动点附近的两条积分轨道

(a) 对应真实太阳; (b) 是将太阳质量人为降低一个量级的结果

4 三角平动点探测器的发射与控制

在上述相关研究结果的基础上, 本章将介绍在日-(地+月)系和地-月系的三角平动点“附近”定点探测器的发射与控制问题。

首先讨论发射问题。对日-(地+月)系而言, 三角平动点是稳定的, 因此不存在类似共线平动点那样的稳定与不稳定流形(简单而言, 给定一个不动点或周期轨道, 稳定流形是指随时间的正向演化向不动点或周期轨道靠近的轨道的集合, 而不稳定流形则是指随时间的正向演化远离不动点或周期轨道的轨道的集合), 不能在近地停泊轨道上经一次变轨即将探测器送入目标轨道的稳定流形使其自动转移到目标轨道上^[16]。将日-(地+月)系的三角平动点当作一颗行星, 该发射问题相当于从地球发射一颗行星际探测器, 与一般行星际探测器所不同的是目标行星的角速度与地、月系质心运动角速度相同。这种行星际探测器的发射, 通常可采用两次变轨的方案, 即首先在近地停泊轨道上变轨一次将它送到目标行星(这里为三角平动点)附近, 然后再次变轨使其“围绕”目标行星运行。通常这类发射轨道可用二体拼接的方法寻找^[17], 下面要介绍的是另一条利用共线平动点的发射途径, 简要阐述如下:

研究表明, 共线平动点 L_1 或 L_2 附近周期轨道的不稳定流形可以到达三角平动点附近, 而稳定流形可以靠近地球。因此, 如果在近地停泊轨道附近变轨一次将探测器送入稳定流形, 使探测器无动力运行到 L_1 或 L_2 附近的周期轨道上, 然后用极小的速度增量(其值相对发射过程所需的总能量可忽略不计)将探测器从周期轨道送入不稳定流形, 即可无动力运行到三角平动点附近。显然, 如果要发射到 L_4 附近, 则探测器首先需从地球发射到 L_1 附近, 然后通过 L_1 附近周期轨道的不稳定流形到达 L_4 附近; 如果要发射到 L_5 附近, 则探测器首先需从地球发射到 L_2 附近, 然后通过 L_2 附近周期轨道的不稳定流形到达 L_5 附近。

文献 [18, 19] 在圆型限制性三体问题模型下详细讨论了如何利用流形及三角平动点附近目标轨道的特点来寻找优化(即节省能量)发射轨道的方法, 这里不再详述。图 4 给出了该文中给出的一条发射到 L_5 附近的转移轨道。可以看出, 转移轨道的很多时间耗费在 L_2 附近的“圈”上(这些圈即为 L_2 附近的周期轨道)。文献 [19] 提出了一种消除这种“圈”的方法, 即

选定过 L_2 与 $x-y$ 平面及 x 轴垂直的平面, 当探测器的转移轨道第一次经过该平面时, 施加一小推力, 使其直接进入 L_2 附近周期轨道的不稳定流形。这样的寻找策略在真实力模型下也是非常有用的, 图 5 给出了一条真实太阳系引力模型下的转移轨道 (采用 DE405 历表)。 L_5 处的目标轨道持续时间为 8 a (该目标轨道为真实力模型下维持一定时间的拟周期轨道, 见下述讨论)。转移轨道的起始点 (近地停泊轨道上的变轨点) 对应的历元 $MJD=54\ 914.8$, 在 P 点处的历元 $MJD=54\ 942.0$, 在 L_5 附近变轨时的历元 $MJD=55\ 908.7$ 。三次变轨速度分别为 $\Delta v_1 = 3\ 197.104\ \text{m/s}$, $\Delta v_2 = 268.725\ \text{m/s}$, $\Delta v_3 = 742.366\ \text{m/s}$, 总能量为 $4\ 208.195\ \text{m/s}$ 。从近地停泊轨道到点 P 需时 $0.074\ \text{a}$, 从点 P 到 L_5 处的目标轨道需时 $2.647\ \text{a}$ 。

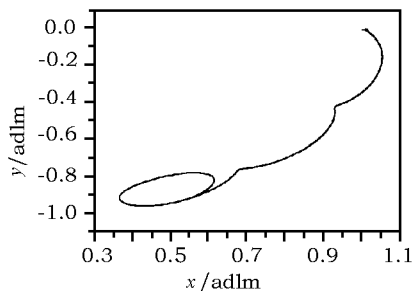


图 4 圆型限制性三体问题下一条发射到 L_5 附近目标轨道的转移轨道

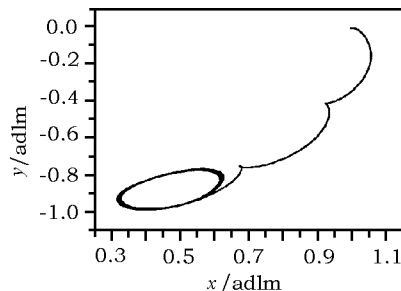


图 5 一条在太阳系真实引力模型下从地球近地停泊轨道到达 L_5 附近目标轨道的转移轨道

一般而言, 要发射行星际探测器, 需要使它脱离地球引力, 而利用共线平动点附近的流形来脱离地球的引力范围往往较节省能量, 这是采用上述方法寻找过渡轨道的原因。当然, 相应的代价是转移轨道“耗费”较长时间, 是否具有实用价值, 要由特定的航天任务确定。

对地-月系而言, 发射探测器到三角平动点附近相当于发射一颗远地卫星, 该卫星的目标轨道为近圆轨道, 轨道半半径为地月平均距离, 因此发射可采用传统的 Hohmann 转移方式, 这里不再详细论述。

关于定点控制问题, 根据前面第 3 章对稳定性分析的介绍可知, 应选取消除长周期运动分量的短周期轨道作为探测器的目标轨道。然而在实际力模型下, 即使轨道的初始条件满足短周期运动的要求, 由于摄动因素的存在, 轨道终究会产生长周期运动分量, 导致轨道漂移而使探测器远离三角平动点。因此在探测器的运行过程中需要对其进行轨控。通常有两种控制方案: 一是每隔一定时间按式 (8) 给出的条件对探测器控制一次, 消除探测器的长周期运动分量; 另一种是选定一条目标轨道, 控制探测器在目标轨道附近运行。若按第二种控制方案进行, 可采用瞬时喷气控制模式或连续小推力控制模式, 有关控制的细节可见文献 [20,21]。不过, 对于地-月系, 由于太阳引力摄动太大, 如果采用圆型限制性三体问题模型下的条件 (见式 (8)) 对探测器进行控制, 不仅耗费能量较大, 而且控制的时间间隔不能太长。图 6 给出了每 $3.578\ \text{a}$ 控制一次的结果 ($x-y$ 平面内), 运行时间为 $1\ \text{a}$, 共控制 91 次, 总能耗为 $1\ 746.132\ \text{m/s}$ 。如果采用第二种控制方式, 目标轨道往往不宜选择圆型限制性三体问题模型下的短周期轨道, 而可以在该系统的三角平动点附近构造一条维持一定时间的拟周期轨道, 采用这类轨道作为目标轨道, 控制所需能量较少。关于如何在真实引力模型下构造拟周期轨道的方法, 读者可参见有关文献 [22]。图 7 就给出了这样一条在控制下运行 $5\ \text{a}$ 的目标轨道 ($x-y$ 平面内), 初始历元为 $MJD=54\ 954$, 初始入轨位置

误差设定为 10^{-6} (在地-月系中相当于 385 m), 速度误差为 10^{-6} (相当于 0.001 02 m/s), 每 4.771 d 控制一次, 喷气能力限制为 $0.1 \text{ m/s} < \Delta v < 10 \text{ m/s}$, 5 a 的总能耗为 0.222 m/s。轨道的不规则形状即与太阳引力摄动有关。

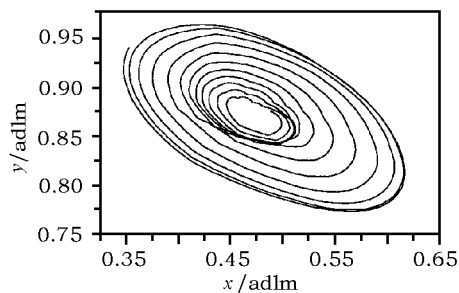


图 6 地-月系中按条件 (8) 控制的轨道

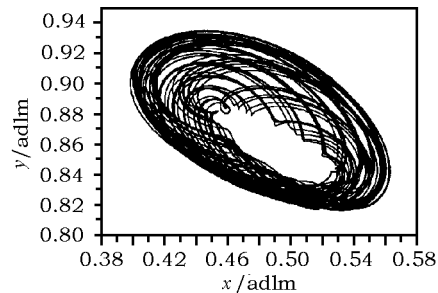


图 7 地-月系中三角平动点附近一条维持约 5 a 的拟周期轨道

不难看出, 采用真实力模型下构造出的拟周期轨道作为目标轨道, 耗费的能量要少得多。这也表明圆型限制性三体问题模型, 对地-月系中利用三角平动点而言, 由于太阳引力摄动太大, 它并非合理的近似。

5 结 束 语

本文对圆型限制性三体问题模型中三角平动点附近的动力学特征作了简要介绍, 在此基础上结合国内外的相关研究工作结果, 对日-(地+月)系和地-月系中三角平动点在深空探测中的应用前景以及如何利用作了相应的分析, 为将来可能的航天任务提供必要的理论依据。

参考文献:

- [1] Szebehely V. Theory of Orbits, New York: academic Press, 1967: 18
- [2] Lo M, Ross S. JPL IOM, 1997: 321
- [3] 刘 林, 侯锡云, 王建峰等. 天文学进展, 2005, 23(2): 180
- [4] 刘 林, 侯锡云, 王海红. 天文学进展, 2006, 24(2): 174
- [5] Deprit A, Deprit-Batholome A. AJ, 1967, 72: 173
- [6] Zagouras C G. Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy, 1985, 37(1): 27
- [7] Hou X Y, Liu L. Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy, 2008, 101(3): 309
- [8] Deprit A, Henrard J. A&A, 1969, 3: 88
- [9] Deprit A, Henrard J. A Manifold of Periodic Orbits. Advances in Astronomy and Astrophysics, New York: Academic Press, 1968: 1
- [10] Hou X Y, Liu L. ApJ, 2008, 678 (2): 1511
- [11] Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2ed. Beijing: Springer-Verlag, 1999
- [12] Zhao Z Y, Liu L. Icarus, 1992, 100: 136
- [13] Hou X Y. On Critical Values Concerning the Evolution of the Long Period Families, submitted to ChJAA, 2008
- [14] Danby J M. AJ, 1964, 69(2): 165

- [15] Bennett A. *Icarus*, 1965, 4: 177
- [16] Gómez G, Jorba A, Masdemont J *et al.* *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 1993, 56 (4): 541
- [17] Battin R H. *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, Rev. ed. AIAA education series, Ohio, 1987: 515
- [18] Barrabés E, Ollé M. *Nonlinearity*, 2006, 19(9): 2065
- [19] Hou X Y, Tang J S, Liu L. *Transfer to the Collinear Libration Point L3 in the Sun-Earth+Moon System, the 20th International Symposium on Space Flight Dynamics*, Annapolis, 2007: 20
- [20] Hou X Y, Wang H H, Liu L. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, 2006, 6(3): 372
- [21] Howell K C, Pernicak H J. *Journal of Guidance and Control*, 1993, 16(1): 151
- [22] Gómez G, Masdemont J, Simó C. *Journal of Astronautical Sciences*, 1998, 42 (2): 135

Applications of the Triangular Libration Points in Deep Space Explorations

LIU Lin^{1,2}, HOU Xi-yun^{1,2}

(1. *Astronomy Department, Nanjing University, Nanjing 210093, China* ; 2. *Institute of Space Environment and Astronautics, Nanjing University, Nanjing 210093, China*)

Abstract: Different from the collinear libration points, the triangular libration points in the Circular Restricted Three-Body Problem (CRTBP) are stable when the mass ratio of the system satisfies some conditions. Since they have constant configurations with respect to the two primaries, these points may be useful for future deep space explorations. Generally, there are periodic and quasi-periodic orbits around these points. These orbits are stable and can be used as nominal orbits for spacecrafts. However, in the real gravitation model of the solar system, these points may become unstable or at least the orbits around them will deviate inevitably. So orbit control is necessary. Due to their better stability than the collinear libration points, orbit control around them may need less energy.

In this paper, the dynamics of these points were firstly stated. In the cases of the sun-earth+moon system and the earth-moon system, two real gravitation models of the solar system, the motion around these points was further investigated. Finally, problems concerning the transfer of a spacecraft to these points and orbit control of the spacecraft were discussed.

Key words: circular restricted three-body problem; triangular libration point; periodic orbit; collinear libration point; invariant manifold