

文章编号: 1000-8349(2009)01-0058-12



# 卫星轨道偏心率的变化特征及其 对轨道寿命的影响

刘 林<sup>1,2</sup>, 汤靖师<sup>1,2</sup>

(1. 南京大学 天文系, 南京 210093; 2. 南京大学 空间环境与航天动力学研究所, 南京 210093)

**摘要:** 轨道偏心率的变化极其重要, 它是制约各类 (不同高度) 空间飞行体轨道寿命的关键因素之一。对于地球低轨卫星, 主要受大气耗散作用的影响, 而对环月 (或环火星) 低轨卫星, 主要受非球形引力位中奇次带谐项的影响, 会出现变幅较大的长周期变化, 从而导致近星点高度  $h_p$  在一段时间内有明显的下降趋势。对大偏心率轨道和高轨道, 第三体的引力作用也会使  $e$  出现变幅较大的长周期变化, 近星点高度  $h_p$  也会有明显下降的现象, 这都会影响卫星的轨道寿命, 但这一动力学机制与大气耗散机制和非球形引力机制都不相同。即对轨道偏心率的变化特征及其对轨道寿命的影响作一综述。

**关键词:** 空间飞行体; 轨道偏心率; 非球形引力; 第三体引力; 轨道寿命

**中图分类号:** P135      **文献标识码:** A

## 1 引 言

本文所要阐述的卫星轨道寿命问题涉及两个方面: (1) 航天任务的要求, 执行各种探测任务的航天器, 在工作寿命期间, 其轨道能否保持一定高度 (即不致因耗散因素作用而陨落或因引力作用而与中心天体相撞) 或相应状态? (2) 空间环境, 即各种留轨飞行体或碎片 (亦称空间垃圾) 在空间停留的状态及其停留的寿命。

空间飞行体的轨道寿命问题, 主要取决于轨道半长径  $a$  和偏心率  $e$  的变化规律, 也就是飞行体的轨道“大小”和“形状”的变化状态。这种变化, 无论是地球卫星还是月球卫星或火星卫星, 对下述 3 类高度的飞行体将有不同的表现:

---

收稿日期: 2008-05-04; 修回日期: 2008-07-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10673006)

(1) 制约低轨飞行体轨道寿命的两种力学机制。对于地球低轨飞行体, 大气耗散效应起着决定性作用, 轨道半长径不断减小, 这就是人们所熟悉的制约地球低轨飞行体轨道寿命的耗散机制。月球无大气, 火星的大气比地球稀薄 (表面气压只有 700 Pa), 但它们的低轨飞行体却同样有轨道寿命问题, 这是非球形引力的作用, 使轨道偏心率出现变幅较大的长周期变化, 在一定时间段内, 相应的近星点高度明显下降, 使其发生与月球或火星相撞的结局, 这就是制约低轨飞行体轨道寿命的另一种力学机制——引力机制。

(2) 制约大偏心率轨道飞行体轨道寿命的力学机制。这类空间飞行体, 如 GTO (发射同步卫星的地球转移轨道) 碎片, 探测号双星 TC-1 ( $e > 0.8$ ) 和 TC-2 ( $e > 0.7$ ) 等。尽管它们的轨道近地点高度很低 (GTO 碎片的近地点高度通常只有 200 km), 但却是一个偏心率较大的大椭圆轨道, 绕地运行过程中, 在近地点附近运行的时间很短, 主要处于高轨状态, 大气耗散作用的总效应很弱, 决定其轨道演化状态的主要因素显然不是大气。但同样有轨道寿命问题, 其原因是第三体 (对地球卫星而言, 即日、月) 的引力作用, 在某种初始状态下, 轨道偏心率的变化会导致近地点高度下降, 使其进入地球稠密大气或直接与地球相撞。这也是一种引力机制, 但与上述制约低轨飞行体轨道寿命的引力机制又有明显差别。

(3) 制约高轨飞行体 (如地球同步卫星或离中心天体更远的空间飞行体) 轨道寿命的力学机制。对于这种完全意义下的高轨 (近星点和远星点均很高的近圆轨道) 飞行体, 即使地球卫星, 其轨道变化也几乎和大气无关, 制约这类飞行体轨道寿命的力学因素显然不是大气耗散作用。当其轨道半长径超过一个临界值  $a_c$  后, 在第三体引力作用下轨道明显地“拉扁”, 即轨道偏心率由  $e \approx 0$  变得很大, 使其近星点高度降到与中心天体相撞的程度。这是另一种制约高轨飞行体轨道寿命的引力机制。

上述引力机制对 3 类轨道又有不同表现。对于月球和火星的低轨飞行体, 将与轨道倾角  $i$  有密切关系, 对于大偏心率轨道, 则与轨道的慢变量  $\Omega$  和  $\omega$  (轨道升交点经度和近星点幅角) 的初始状态有密切关系。而对于近圆的高轨道, 却主要取决于轨道半长径  $a$  的大小, 其临界值  $a_c$  与中心天体的动力学扁率  $J_2$  的大小直接关系。本文将依据轨道变化理论<sup>[1]</sup>来阐明这种引力机制如何通过轨道偏心率的影响来制约 3 类不同轨道卫星的轨道寿命, 并有相应的数值检验。不过, 对于大偏心率轨道和高轨道两类飞行体, 它们的轨道寿命问题, 在 3 个中心天体 (地球、月球和火星) 之间并无实质性差别, 故对这两类卫星, 主要针对地球卫星阐述有关内容。

## 2 低轨飞行体轨道变化的特征及其轨道寿命

对于地球低轨 (如高度在 1000 km 以下) 飞行体, 其轨道演化状态及其相应的轨道寿命主要取决于大气耗散作用, 轨道半长径和偏心率均不断地减小, 在短时间内落入地球的稠密大气层 (如高度在 100 km 以下) 而陨落, 几乎完全烧毁, 此即众所周知的常识。尽管飞行体落入 100 km 以下的稠密大气后有更复杂的物理过程, 但这已不是本文要阐述的问题, 下面不再提及这个内容。

对于月球低轨飞行体, 将有另一种力学图像, 而描绘出这一图像的关键因素是月球非球形引力位的特征, 特别是引力位中决定月球引力场南北不对称的奇次带谐项的特征。为此本

文列出一种较好的月球引力场模型的部分参数：美国 JPL 的 LP75G 模型的前 20 阶带谐项系数，如表 1 所示，其中取  $GM = 4\,902.800\,269\text{ km}^3/\text{s}^2$ ,  $a_e = 1\,738.0\text{ km}$ 。

表 1 月球引力场模型 LP75G 的带谐项系数

$l$	$\bar{C}_{l,0}$	$l$	$\bar{C}_{l,0}$	$l$	$\bar{C}_{l,0}$	$l$	$\bar{C}_{l,0}$
2	-9.09759705421E-05	3	-3.18354210680E-06	12	-1.99394050844E-06	13	5.33567368249E-08
4	3.17891147722E-06	5	-2.59812866570E-07	14	6.52989391396E-07	15	1.37947201734E-07
6	3.86236223769E-06	7	5.67373030342E-06	16	6.14034505167E-07	17	-7.31676821100E-07
8	2.35081824433E-06	9	-3.45967761182E-06	18	-7.96355519107E-07	19	-1.70818407129E-07
10	-1.16218759517E-06	11	-1.12206022536E-06	20	1.88974686302E-07		

从表 1 中的数据可以看出，除月球自转较慢、动力学扁率  $J_2 = -C_{2,0} = -\sqrt{5}\bar{C}_{2,0}$  较小 ( $10^{-4}$ ) 外，奇次带谐项系数  $\bar{C}_{2l-1,0} (l \geq 2)$  与  $\bar{C}_{2,0}$  之比  $|\bar{C}_{2l-1,0}/\bar{C}_{2,0}|$  的量级接近  $10^{-1}$ ；对地球引力场， $|\bar{C}_{2l-1,0}/\bar{C}_{2,0}|$  的量级只有  $10^{-3}$ ，这将导致低轨环月运行探测器轨道偏心率  $e$  出现振幅较大的长周期变化，从而出现一些地球低轨卫星不会出现的现象。

对于火星低轨飞行体，也有类似的力学图像，关键因素同样是非球形引力位中反映南北不对称的奇次带谐项的作用。为此，表 2 列出了美国 Goddard Mars Model: GMM-2B(50×50 阶次) 带谐项的前 10 阶带谐项系数。从表 2 中的数据可以看出，奇次带谐项系数  $\bar{C}_{3,0}$  与  $\bar{C}_{2,0}$  之比  $|\bar{C}_{3,0}/\bar{C}_{2,0}|$  的量级超过  $10^{-2}$ ，这同样与地球有较明显的差别，其中取  $GM = 42\,828.3719\text{ km}^3/\text{s}^2$ ,  $a_e = 3\,397.0\text{ km}$ ,  $\varepsilon = 0.005\,231\,844$ 。

表 2 GMM-2B 部分带谐项系数

$l$	$\bar{C}_{l,0}$	$l$	$\bar{C}_{l,0}$
1	0.000000000E+00	2	-0.874505471E-03
3	-1.188691064E-05	4	0.512579872E-05
5	-1.724206851E-06	6	1.344826751E-06
7	1.056696608E-06F	8	1.444211746E-07
9	-2.874559324E-07	10	7.258697018E-07

文献 [2] 对月球卫星轨道寿命作过计算；考虑  $J_3, J_5$  等项，文献 [3-6] 对月球的高轨和低轨卫星的轨道寿命均作过一些分析和计算；文献 [7] 则从理论上作了进一步的深入分析，更清晰地阐明了这种制约低轨飞行体轨道寿命的引力机制，以及与轨道倾角的关系，并明确指出冻结轨道 (如果存在) 并不能影响这一机制，且有具体数值检验；文献 [8] 对火星卫星轨道寿命也作过计算，考虑  $J_3, J_5$  等项，轨道偏心率  $e$  的变幅可达 0.02，同样会像月球低轨卫星那样，影响轨道寿命，但是，两者的规律又不相同。因对偏心率  $e$  的长周期影响，除  $|J_{2l-1}/J_l|$  值外，还与轨道倾角  $i$  有密切关系，而这一关系在火星低轨卫星的轨道变化中有与月球低轨卫星完全不同的反映，其影响大小随轨道倾角的变化是单调的。

根据文献 [7] 的理论分析表明，对月球和火星低轨飞行体轨道偏心率  $e$  影响最大的摄动因素就是非球形引力位中的奇次带谐项。相应的  $e$  的长周期变化的表达式如下：

$$\begin{aligned}\Delta e_l &= e_l(t) - e_l(t_0) \\ &= \mu(i)[\sin \bar{\omega}(t) - \sin \bar{\omega}(t_0)] \quad ;\end{aligned}\quad (1)$$

$$\mu(i) = \sum_{l(2) \geq 3} (-1)^{(l-1)/2} \frac{l-1}{3p^{l-2}} \left(\frac{J_l}{J_2}\right) F_l^*(i) \quad . \quad (2)$$

式(2)中  $p = a(1 - e^2)$ ,  $l(2)$  表示取值“步长”为 2, 即  $l(2) = 3, 5, \dots$ 。由此可以看出,  $e$  的变幅  $|\Delta e_l|$  主要取决于奇次带谐项系数  $J_{2l-1} (l \geq 2)$  与  $J_2$  的相对大小以及在函数  $\mu(i)$  中的体现。 $F_l^*(i)$  是  $\sin i$  的函数, 具体形式不再列出, 详见文献 [9]。

对于地球卫星, 由于

$$O(J_{2l-1}/J_2) = 10^{-3} \quad (3)$$

相应的轨道偏心率的变幅很小, 而月球卫星和火星卫星则不同, 由于

$$O(J_{2l-1}/J_2) = 10^{-1} \quad (\text{月球}), \quad O(J_{2l-1}/J_2) = 10^{-2} \quad (\text{火星}) \quad (4)$$

故完全有可能使低轨飞行体的轨道偏心率  $e$  增大到使近星点高度  $h_p = 0$  的状态。当然, 这还要取决于  $\mu(i)$  值的变化状况, 它既取决于  $i$  值的大小和  $F_l^*$  的性质, 同时与相应  $J_{2l-1}$  的值密切相关, 即与月球和火星南北不对称的具体细节 (包括形状的不规则和质量密度分布的不均匀性) 有关。

由于月球非球形引力位的特征 (由函数  $\mu(i)$  体现), 随着不同的  $i$  值 ( $0^\circ \leq i \leq 90^\circ$ ) 长周期变化  $\Delta e_l$  的模  $|\Delta e_l|$  将出现多个极小与极大值, 相应的  $h_p$  值将不会降至 0 或必然会降至 0 值, 亦即月球低轨飞行体的轨道寿命既取决于奇次带谐项的摄动影响, 又与轨道的空间定向有关。火星质量密度分布的不均匀性没有月球那样明显, 而函数  $\mu(i)$  含有因子  $\sin i$ , 随着  $i$  值 ( $0^\circ \leq i \leq 90^\circ$ ) 的减小, 相应的长周期变化  $\Delta e_l$  的模  $|\Delta e_l|$  呈现单调减小的趋势。

为了表明理论分析的正确性, 对月球低轨飞行体 (平均高度 100 km), 文献 [7] 分别给出下列两种情况的计算结果:

(1) 根据式 (1), 从  $i = 0^\circ.5$  到  $179^\circ.5$ , 每间隔  $1^\circ$ , 分别计算其对应的  $|\Delta e_l|$  值, 看极小与极大的分布状况。

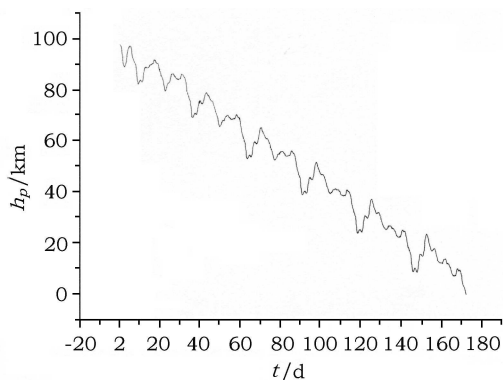
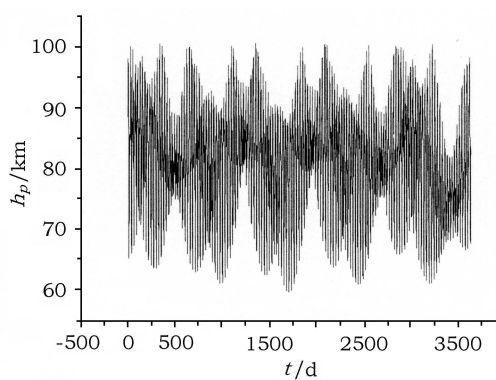
(2) 考虑主要摄动因素 (月球非球形引力、地球引力和太阳引力), 随倾角  $i_0$  的不同对完整的运动方程计算了低轨卫星 (取平均高度  $\bar{h} = 100$  km,  $e_0 = 0.001$ ) 相应近月点高度  $h_p$  的变化情况, 即轨道寿命与倾角  $i$  的关系, 上述第 2 部分的计算正是为了证实由分析解给出的结果的正确性, 从而确定月球低轨飞行体轨道寿命与倾角  $i$  的关系, 同时也进一步证实这种结果主要是由月球非球形引力场特征所决定的。在计算中, 月球引力场模型采用了美国 JPL 完整的 LP75G 模型。

关于  $|\Delta e_l|$ , 对应极小值有几个“稳定区” (即  $|\Delta e_l|$  值最小):  $i = 0^\circ, 27^\circ, 51^\circ, 77^\circ, 85^\circ$ 。根据  $\sin i$  的性质, 在  $90^\circ \sim 180^\circ$  间有对应的“稳定区”, 即  $95^\circ, 103^\circ, \dots$ 。在上述“稳定区” (即取  $i_0 = 0^\circ, 27^\circ, \dots$ ), 低轨飞行体的轨道寿命应很长, 而相反, 则轨道寿命应很短。计算结果确实如此, 详见文献 [7], 表 3 列出部分结果。

表 3 月球低轨飞行体轨道变化特征与倾角  $i$  的关系

$i/(\circ)$	$T_c/d$	Max $e$	Min $h_p/km$
1.0	2723.1	0.0362	33.9
27.0	2219.9	0.0419	23.6
51.0	1908.1	0.0337	38.5
77.0	3383.8	0.0381	30.4
85.0	1711.7	0.0220	59.6
95.0	1102.0	0.0172	68.3
10.0	42.5	0.0545	0.0
40.0	47.9	0.0547	0.0
60.0	88.2	0.0548	0.0
82.0	294.7	0.0547	0.0
90.0	172.0	0.0545	0.0
98.0	236.2	0.0546	0.0

下面再用几幅图来详细地说明, 见图 1 和图 2, 分别为  $i_0 = 90^\circ$  和  $85^\circ$  时  $h_p$  随时间的变化状态, 前者 172 d 与月球相撞, 后者 10 a 期间的极小值还有 60 km 高。

图 1 初始轨道倾角  $i_0 = 90^\circ$  的月球低轨卫星轨道寿命图 2 初始轨道倾角  $i_0 = 85^\circ$  的月球低轨卫星轨道寿命

对火星低轨飞行体 (平均高度 100 km 和 200 km), 也作了相应的计算。采用引力模型 GMM-2B, 取项  $J_{l,m}$  ( $l = 2 \sim 30$  阶次), 100 km 高的卫星, 倾角  $i = 90^\circ$  的近圆轨道, 在  $t = 23.3$  d 时, 近火点高度就下降为零, 即与火星相撞, 将倾角  $i$  减小, 状态就完全不一样。轨道外推 1 a, 计算结果列于表 4。

表 4 火星低轨飞行体轨道变化特征与倾角  $i$  的关系

$h/km$	$i/(\circ)$	$t_c/d$	Max $e$	Min $h_p/km$
200	90	87.6	0.0210	116.335
	45	96.1	0.0148	144.087
	5	52.1	0.0059	180.782
100	90	23.3	0.0255	0.0
	45	190.6	0.0174	33.952
	5	271.6	0.0074	73.784

上述数值结果一方面验证了理论分析的正确性, 同时也给出了低轨飞行体轨道寿命与倾角  $i$  的关系 (严格地说是引力场南北不对称通过倾角  $i$  的体现)。尽管这些结果是针对  $h = 100$  km 或 200 km 高的近圆轨道飞行体给出的, 对其他高度同样有类似的规律。对于月球低轨卫星而言, 那些保持不与月球相撞的所谓“稳定区”的范围 (对轨道倾角  $i_0$  值而言) 都较小, 考虑到各种因素 (包括发射误差的影响), 即使允许选择适当的倾角, 也还要注意运行过程中的轨道控制。

### 3 大偏心率轨道飞行体的轨道寿命

关于这类空间飞行体, 尽管其近地点高度  $h_p$  很低, 如 GTO 碎片通常  $h_p \approx 200$  km, 探测号双星 TC-1 和 TC-2 的  $h_p$  稍高一些, 但因轨道偏心率  $e$  很大, 均在  $e > 0.7$  的状态, 故在一个绕地运行周期内, 主要是在远地空间运行。那么, 大气耗散效应以及地球非球形引力 (除  $J_2$  项外) 作用均很弱, 主要应考虑  $J_2$  项和第三体 (日、月) 的引力作用。这两类摄动因素均为保守力, 无耗散效应, 故应考查如何通过对轨道偏心率  $e$  的影响来制约其轨道寿命。

#### 3.1 两个实例

除轨道升交点赤经  $\Omega$  不同而其他 5 个轨道根数均相同的两个 GTO 碎片, 相隔 3 h 前后进入“预定”轨道, 在地固坐标系中的经度均为  $\Omega_G = -10^\circ$ , 结果它们的轨道寿命各自相差极其明显, 前者约为 160 d, 而后者长达 50 a。相应的初始轨道状态如下:

历元  $t_0=2006$  年 12 月 21 日 10 时和 13 时 (UTC), 在地固坐标系中的轨道根数相同, 即

$$h_p = 200 \text{ km}, h_a = 36000 \text{ km}, i = 28^\circ.5, \Omega_G = -10^\circ.0, \omega = 180^\circ.0, M = 0^\circ.0 \quad (5)$$

相应的轨道半长径和偏心率为  $a = 24478.1363$  km,  $e = 0.73126482$ ,  $\Omega_G$  是从格林尼治方向起量的轨道升交点经度, 在相应的历元 (J2000.0) 地心平赤道坐标系 (以下简称地心天球坐标系) 中的轨道升交点经度  $\Omega$  别为  $\Omega = 229^\circ.837399$ ,  $\Omega = 274^\circ.960611$ 。

采用数值方法考查两个 GTO 碎片运行轨道的演化状态。由于轨道偏心率较大, 基本上在远地空间运行, 考虑摄动因素的取舍有别于低轨卫星。本文在轨道演化计算中采用的动力学模型包括如下摄动因素:

- (1) 地球非球形引力项  $J_{lm}$  (即  $C_{lm}, S_{lm}, l = 2 \sim 4, m = 0 \sim l$ );
- (2) 日、月引力项, 日、月轨道采用包含长期和长周期变化的平均轨道;
- (3) 大气耗散项 (大气阻力作用)。

其中大气密度采用考虑周日变化的指数模式, 相应的参考点密度和密度标高值均采用最新的平均大气模式给出的数值。碎片的等效面质比与阻力系数的乘积  $C_d S/m$  在归一化单位中取为  $10^9$  (相当于  $1 \text{ m}^2$ , 重 100 kg 的截面)。计算中, 当近地点高度  $h_p$  降至 100 km 时, 作为轨道寿命的结束时刻。

对于等效面质比为  $10^9$  的 GTO 碎片, 光压影响不会超过第三体引力作用, 考虑这一影响与否, 对本文要讨论的问题无实质性影响。对于一些空间碎片, 其相应的面质比较大, 如  $S/m = 1 \text{ m}^2/1 \text{ kg}$ , 相当于  $10^{11}$ , 光压作用不可忽视, 但这不是本文要阐述的问题。因此, 下面不再提及该摄动因素。

计算弧段, 设定为  $t - t_0 = 50$  a, 数值积分采用高精度的 RKF7(8) 积分器<sup>[10]</sup>, 并同时采用积分步长均匀化措施<sup>[11]</sup>。计算结果列于表 5。

表 5 两个 GTO 碎片的轨道演化状态

模型	$J_{lm}$	日、月	大气	碎片	$t/d$	$a/km$	$e$	$h_p/km$
1	√	×	√	GTO-1	11643.5	6518.2	0.0063	98.9
				GTO-2	11791.8	6508.3	0.0055	94.6
2	√	√	×	GTO-1	144.7	24411.3	0.7346	100.0
				GTO-2	18262.5	24386.3	0.7263	295.4
3	√	√	√	GTO-1	160.7	22235.9	0.7088	99.9
				GTO-2	17981.9	6796.5	0.0468	100.0

表 5 中的符号 √ 和 × 分别表示考虑和不考虑该摄动因素。为了进一步看清轨道偏心率和近地点高度的变化细节以及第三体引力的重要作用, 分别给出上述 2 个碎片在第一和第三两种

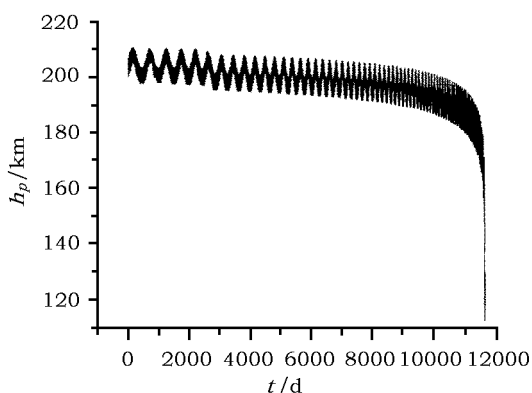


图 3 模型 1 对应的 GTO-1 的近地点高度的变化图像

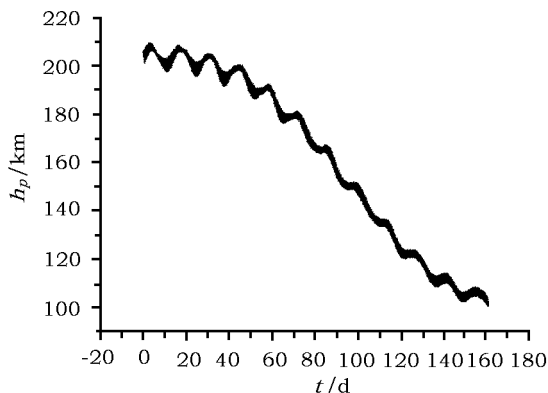


图 4 模型 3 对应的 GTO-1 的近地点高度的变化图像

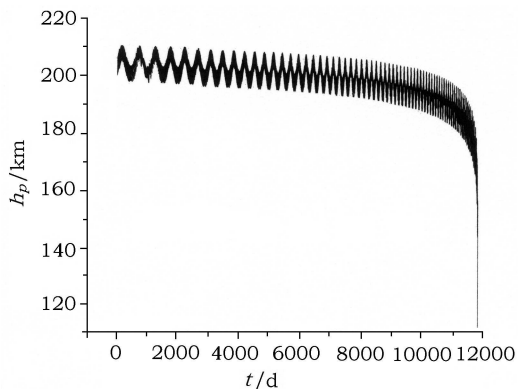


图 5 模型 1 对应的 GTO-2 的近地点高度的变化图像

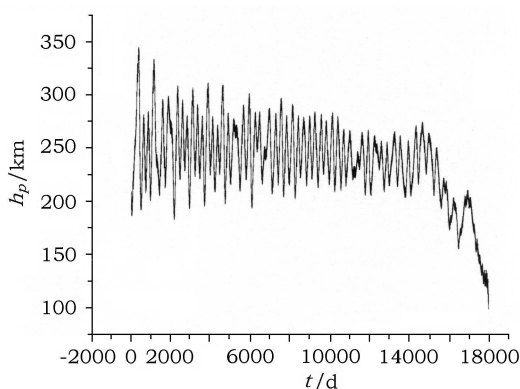


图 6 模型 3 对应的 GTO-2 的地点高度的变化图像

力模型下相应的近地点高度的变化图像: 图 3、4 给出的是 GTO-1 的轨道变化, 图 5、6 则是 GTO-2 的轨道变化。

从表 5 和图 3—6 可以清楚地看出, 大气耗散效应确实不是决定 GTO 类型轨道寿命的主要因素, 该效应很弱, 轨道高度降低较慢 (见模型 1 对应的结果), 而且两个初始轨道状态不同 (仅高度相同) 的碎片, 它们的轨道变化规律几乎没有差别。不仅轨道寿命, 而且轨道变化的细节也相同, 其  $a$  和  $e$  均不断减小 ( $e$  比  $a$  减小的速度慢, 前者变化率中多一个  $e$  因子), 相应的近地点高度也随之降低, 见图 3 和图 5。

鉴于上述结果, 对于 GTO 这种大偏心率情况的轨道寿命问题, 必须着重考查日、月引力摄动效应, 即模型 2 和 3, 特别是模型 2, 可以充分反映日、月引力摄动的重要特征。下一段将针对这一点, 根据轨道力学原理进行深入的理论分析。

### 3.2 理论分析

计算结果表明, 各种摄动的短周期效应并不起作用, 它们的影响较小。这从摄动量级的大小亦可看出, 无论是地球非球形引力摄动, 还是第三体 (日、月) 引力摄动, 对于 GTO 而言, 相应的摄动量级均为  $10^{-5} \sim 10^{-4}$ , 短周期效应不足以影响轨道寿命。而这两种摄动力均为保守力, 属非耗散因素, 因此, 问题集中在长周期效应上。事实上, 轨道半长径  $a$  只有高阶长周期变化<sup>[2]</sup>, 即  $a_l^{(1)}(t) = 0$ , 故应考查轨道偏心率  $e$  的长周期变化状态。

这里首先分别列出  $e$  的长周期变化中最重要的  $J_2, J_3, J_4$  项和日、月引力项对应的结果。在归一化单位中, 有如下形式<sup>[1,2]</sup>:

$$e_l(t; J_l) = \left(\frac{1}{a}\right) \sin i \left\{ \left(\frac{J_2}{4p^2}\right) \sin i \frac{1 + 2\sqrt{1-e^2}}{(1 + \sqrt{1-e^2})^2} e \cos \omega + \right. \quad ; \quad (6)$$

$$\left. \left(\frac{3}{8p}\right) \frac{\sin i}{(4 - 5 \sin^2 i)} \left[ J_2 \left(\frac{7}{3} - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) + 35 \left(\frac{J_4}{J_2}\right) \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{6} \sin^2 i\right) \right] e \cos \omega - \frac{1}{2} \left(\frac{J_3}{J_2}\right) \sin \omega \right\}$$

$$e_l(t; m') = -\left(\frac{3}{2}\beta a^3\right) \left(5e\sqrt{1-e^2}\right) n H_1 \quad ; \quad (7)$$

$$H_1 = \frac{1}{16} \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos i)^2 K_1 + \frac{1}{2}(1 + \cos i)^2 K_2 + \sin^2 i K_3 + 2 \sin i (1 - \cos i) K_4 + (1 + \cos i) K_5 \right] . \quad (8)$$

其中,  $\beta = m'/r'^3$ , 而  $K_1, K_2, \dots, K_5$  是慢变量  $\Omega$  和  $\omega$  以及日、月轨道根数  $i', \Omega', u' = f' + \omega'$  等量的函数, 且含小分母  $n_j$ ,  $n_j$  是  $\Omega, \omega$  和  $\Omega', \omega'$  的变率的组合。具体表达式不再列出, 详见文献 [1] 的第 9 章。

GTO 碎片近地点高度  $h_p = a(1 - e) - a_e$  的变化取决于半长径  $a$  和偏心率  $e$  的变化, 在上述两种摄动因素影响下,  $a$  只有量级约为  $10^{-4} \sim 10^{-3}$  的周期变化, 并不重要, 决定因素显然是偏心率  $e$  的长周期变化。GTO 碎片的轨道半长径  $a$  约为 24 500 km, 只要偏心率  $e$  的变化  $\Delta e \geq 0.004$ , 即使  $a$  不减小, 近地点高度  $h_p$  亦会降低 100 km。而从式 (7) 和 (8) 可以看出, 日、月引力摄动影响明显比地球非球形引力影响大, 后者引起的长周期变化振幅约为  $10^{-4} \sim 10^{-3}$ , 而前者由于  $a$  较大引起的小分母  $n_j$ , 可使  $e$  的长周期变化振幅达 0.004。

既然日、月引力摄动可使 GTO 碎片轨道的近地点高度下降 100 km 而进入地球稠密大气层导致陨落, 那么为什么 GTO-2 却有不同结果, 如无大气耗散影响, 即使 50 a 后, 其近地点



高度  $h_p$  也不会降至 100 km。这表明与初始状态有关, 因  $e_l(t)$  是长周期变化, 它与慢变量  $\Omega$  和  $\omega$  等有关, 例如  $e_l(t_0)$  随  $\omega$  的变化。为此, 本文给出  $e_l(t_0)$  随  $\omega$  的状态曲线, 见图 7、8。

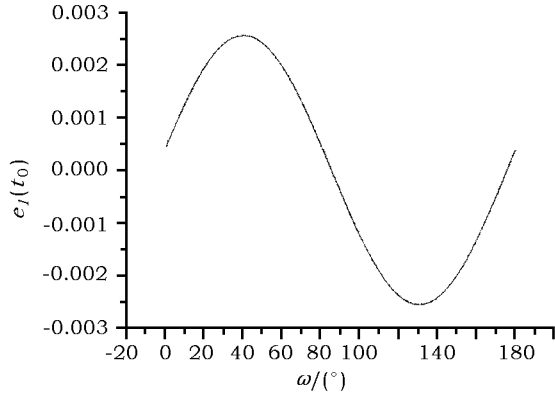


图 7 GTO-1 的  $e_l(t_0) - \omega$  变化曲线

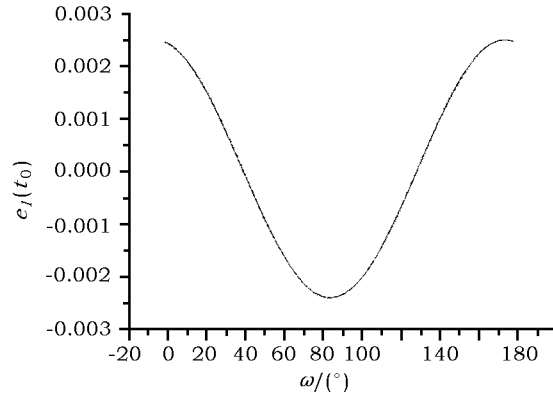


图 8 GTO-2 的  $e_l(t_0) - \omega$  变化曲线

从图 7、8 可以看出, GTO-1 在初始  $t_0$  时刻, 处于  $e_l(t_0) \approx 0$  的状态, 就其长周期变化而言, 初值  $e_0 = e(t_0)$  接近  $e$  的平均值; 而 GTO-2, 正好处于  $e_l(t_0)$  达极大的状态, 相应的初值  $e_0$  达到极大。那么, 前者从  $t_0$  开始,  $e$  随着  $t$  增大, 且增大的幅度可接近 0.004, 见表 5 中模型 2 反映的结果, 它导致碎片的近地点高度  $h_p$  很快将到 100 km 以下。而后者正相反, 就  $e$  的长周期变化而言, 在初始  $t_0$  时刻正处于  $e$  的极大状态, 相应的近地点高度为 200 km。那么, 如果无大气耗散影响, 随着  $e$  的变化, 其近地点高度  $h_p$  不会降至 100 km, 同样见表 5 中模型 2 给出的结果。在具有这种力学机制的前提下, 同时考虑大气耗散效应时, 对于 GTO-1, 因大气耗散会使  $e$  减小, 故  $e$  增大的程度要小一些, 致使其轨道寿命稍有增长的现象。而对于 GTO-2, 同时考虑大气耗散影响时, 轨道半长径要减小, 故其近地点高度  $h_p$  仍旧有降低的现象, 但比模型 1 不考虑日、月引力摄动时要减慢降低的速度, 见表 5 中模型 3 的结果与模型 1 和 2 结果之间的对比。

### 3.3 理论分析的数值验证

为了证实上述理论分析的正确性, 我们改变上述两个 GTO 轨道的初始状态。对于 GTO-1, 将  $\omega_0 = 180^\circ$  改为  $45^\circ$ , 使其在初始时刻时  $t_0$ , 处于  $e_l(t_0)$  极大状态, 相应的  $e_0$  亦处于极大值。而对于 GTO-2, 则将  $\omega_0 = 180^\circ$  改为  $90^\circ$ , 使其在  $t_0$  时, 处于  $e_l(t_0)$  的极小状态。那么, 按上述理论分析, 改造后的 GTO-1 和 GTO-2 的轨道寿命状况应与原状态相反, 即 GTO-2 的寿命应很短, 而 GTO-1 的寿命应很长。计算结果列于表 6。

表 6 两个改变初始状态后的 GTO 碎片的轨道演化

模型	$J_{lm}$	日、月	大气	碎片	$t/d$	$a/km$	$e$	$h_p/km$
2	√	√	×	GTO-1	18262.5	24417.2	0.7258	321.1
				GTO-2	281.0	24499.0	0.7356	99.9
3	√	√	√	GTO-1	18262.5	19314.2	0.6570	251.5
				GTO-2	297.1	22587.7	0.7132	99.9

其中, GTO-1 在模型 2 和 3 中, 分别于  $t = 12977.6$  d 时  $h_p$  达到极小值 177.4 km;  $t = 28.1$  d 时,  $h_p = 191.8$  km。

表 6 中给出的结果已清楚地体现了 3.2 节的理论分析结果。这一理论分析结论同样适用于分析探测号双星 (TC-1 和 TC-2) 的轨道演化及其轨道寿命问题, 基本规律相同, 详细介绍见文献 [12]。

## 4 高轨卫星的轨道演化特征及其寿命问题

对于高轨卫星, 第三体引力摄动效应将增强, 例如  $a = 6.6a_e$  ( $a_e$  即地球赤道半径) 的地球同步卫星, 日、月引力影响已接近地球扁率 ( $J_2$  项) 的影响, 摄动量级约为  $10^{-5} \sim 10^{-4}$ 。此时, 导致卫星轨道偏心率长周期变化幅度增大的主要因素是日、月摄动作用, 在该影响下,  $e$  的变化幅度的主项含有  $\sin^2 i / \dot{\omega}$  的因子,  $\dot{\omega}$  是包含地球非球形引力和第三体引力摄动的长期变化率, 其极小值的量级约为  $10^{-5}$ , 故  $e_l(t)$  的变幅相当大, 特别是对  $i = 90^\circ$  的极轨卫星 [3-5]。当轨道半长径  $a \geq a_c$  的高轨卫星, 其轨道偏心率的长周期变化幅度之大, 可使卫星近地点高度  $h_p = r_p - a_e$  接近 0, 从而与地球“相撞” (或近地点高度降到 200 km 以下, 很快进入地球稠密大气层而陨落), 结束轨道寿命。这里所说的  $a_c$  即轨道半长径的临界值。文献 [4,5] 给出如下的近似判据:

$$a_c = \left[ 2 \left( \frac{\mu}{\mu'} \right) \left( \frac{a'}{a_e} \right)^3 J_2 \right]^{1/5} a_e \quad (9)$$

$$\mu = GE, \quad \mu' = GM \quad (10)$$

这里  $GE$  是地球引力常数, 而  $GM$  是日心 (或月心) 引力常数,  $a'$  则是日、月相对地心的轨道半长径。由式 (9) 给出,  $a_c = 8.2 a_e$ , 对于月球, 由于动力学扁率  $J_2$  较小, 其量级为  $10^{-4}$ , 相应的  $a_c = 2.2 a$ , 这里  $a_e$  是月球赤道半径。为证实这一判据, 本文给出  $a_c = 8.5 a_e$ ,  $7.5 a_e$  和  $6.6 a_e$  分别对应  $i = 90^\circ$  和  $28^\circ.5$  (或  $1^\circ$ ) 的数值检验。计算初始历元  $t_0$  是 2006 年 12 月 21 日 10 时 (UTC), 相应的轨道数据列于表 7。计算弧段取 100 a, 若近地点高度降至 200 km 时, 计算中断, 相应的持续时间作为轨道寿命的近似值。同样考虑地球非球形引力项  $J_{lm}$  ( $l = 2 \sim 4$ ,  $m = 0 \sim l$ ) 和日、月引力摄动, 计算结果列于表 8。

表 7 三种高轨道在历元  $t_0$  时刻的轨道数据

类型	$a$ / km	$e$	$i / (^\circ)$	$\Omega / (^\circ)$	$\omega / (^\circ)$	$M$
$a = 8.5 a_e$	54214.200	0.001	90, 28.5	230.0	180.0	0.0
$a = 7.5 a_e$	47836.000	0.001	90, 28.5	230.0	180.0	0.0
$a = 6.6 a_e$	42165.000	0.001	90, 1.0	230.0	180.0	0.0

从表 8 中的数据可以看出:

(1) 当  $a > a_c$  ( $a = 8.5 a_e$ ) 或  $a_c \leq a$  ( $a = 7.5 a_e$ ), 轨道确实会被第三体引力拉扁 (即轨道半长径几乎不变, 而偏心率明显增大), 相应的近地点高度  $h_p$  明显降低, 继而很快会因同时存

在的耗散因素使其进入地球的稠密大气层而陨落。当  $a$  在远离  $a_c$  (如  $a = 6.6 a_e$ ) 时, 其轨道偏心率的变化幅度不会太大, 从而不会使相应的近地点高度变得太低, 轨道寿命相当长。

表 8 三种高轨道卫星的轨道变化特征

类型	$i_0/(^{\circ})$	$t/d$	$a/km$	$e$	$h_p/km$
$a = 8.5 a_e$	90	19385.4	54215.2	0.8787	200.0
	28.5	11383.6	54209.6	0.0034	47649.1
$a = 7.5 a_e$	90	24543.4	47836.2	0.8265	1921.0
	28.5	28583.9	47832.9	0.0020	41385.2
$a = 6.6 a_e$	90	32735.2	42139.6	0.6643	7768.9
	1.0	10145.4	42132.4	0.0015	35692.1

(2) 高轨卫星的轨道偏心率  $e$  在第三体引力摄动下, 确实有较大的长周期变化。但只有  $a \geq a_c$  时在不太长的时间弧段上才有可能使  $h_p$  降到较低的状态, 制约其轨道寿命, 而  $a = 6.6 a_e$  时, 若要使  $h_p \leq 200 km$ , 由于轨道半长径变化很小,  $e$  值必须达到 0.84 才有可能, 但在 100 a 内, 即使  $i = 90^{\circ}$ ,  $e$  的极大值才达到 0.6643。表中  $e$  的变化幅度正如上述分析所提出的与倾角  $i$  有关,  $i = 90^{\circ}$  的极轨受影响最明显, 而小倾角的高轨卫星轨道, 偏心率  $e$  的变化幅度确实很小, 具体的变化细节不再列出。

与 GTO 类型的空间飞行体轨道变化类似, 在一般面质比 (如  $10^9$ ) 情况下, 光压并不重要, 即使将面质比增大一个量级 ( $10^{10}$ ), 计算结果与上述面质比为  $10^9$  的空间飞行体的轨道变化无明显差异。除非面质比特别大的空间飞行体, 如需要借助于光压的太空帆, 这已不是本文要阐明的课题。

## 5 结束语

无论是低轨飞行体还是大偏心率轨道和高轨道空间飞行体, 其轨道变化的主要特征 (轨道半长径  $a$  和偏心率  $e$  的变化) 及其轨道寿命的长短, 除大气耗散效应 (如地球低轨飞行体) 外, 主要取决于两种引力机制, 即中心天体非球形引力位中的奇次带谐项和第三体引力, 并通过偏心率  $e$  的长周期变化来体现。这对了解空间垃圾的存在状况和保证各类卫星具备足够长的工作寿命有重要意义。

### 参考文献:

- [1] 刘 林. 航天器轨道理论. 北京: 国防工业出版社, 2000:120
- [2] Meyer K W, Buglia J J, Desai P N. NASA Technical Paper 3394, 1994
- [3] Marchal C L, The Restricted Three-Body Problem Revisited, the 50th International Astronautical Congress, Amsterdam: The Netherlands, 1999: IAF-99-A.7.01
- [4] 王 歆, 刘 林. 目标天体极轨道卫星的轨道寿命, 宇航学报, 2001, 22(5): 62
- [5] 王 歆, 刘 林. 制约卫星轨道寿命的另一种机制, 天文学报, 2002, 43(2): 189
- [6] 王 歆, 刘 林. 制约卫星轨道寿命的另一种机制 (续), 天文学报, 2002, 43(4): 379

- [7] 刘 林, 王海红. 关于月球低轨卫星运动的两个问题, 天文学报, 2006, 47(3): 275
- [8] 刘 林, 汤靖师. 火星轨道器运动的轨道变化特征, 宇航学报, 2008, 29(2): 461
- [9] 刘 林, 王家松. 月球卫星轨道变化的分析解, 天文学报, 1998, 39(1): 81
- [10] Fehlberg E, Classical Fifth-, Sixth-, Seventh- and Eighth-order Runge-Kutta formulas with stepsize control. NASA TR R-287, 1968.
- [11] 刘 林, 廖新浩. 关于数值求解人造卫星运动方程的几个问题. 天文学报, 1997, 38(1): 75
- [12] 刘 林, 汤靖师. 关于 HEO 空间飞行体的轨道寿命问题, 空间科学学报, 2007, 27(3): 327

## The Variable Feature of Orbital Eccentricity and its Influence on Orbital Lifetime

LIU Lin<sup>1,2</sup>, TANG Jing-shi<sup>1,2</sup>

(1. Astronomy Department, Nanjing University, Nanjing 210093, China; 2. Institute of Space Environment and Astronautics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

**Abstract:** Variations of eccentricity are very important for satellites orbiting the earth, the moon or Mars. It is one of the key factors determining the lifetime of various space objects (with different orbit height). In order to fulfill space explorations in a given time, the satellite should have a lifetime long enough. Otherwise, controlling strategies are needed to keep a space object around its orbit at enough height. Variations of pericenter height are necessary for these controlling strategies.

For low-earth orbit satellites, their eccentricities are mainly affected by dissipative atmosphere drag. For low-moon (or low-Mars) orbit satellites, the eccentricity is mainly caused by odd zonal coefficients in non-spherical gravitation of a central body. Long-period variations with larger amplitude will cause obvious decline of the pericenter height  $h_p$  in a segment of time. These long-period variations have close relations with  $|J_{2l-1}/J_l|$  and orbital inclination  $i$ . However, these relations are quite different for the cases of low-moon (and low-Mars) orbit satellites orbit satellites. For orbits (around the earth, the moon or Mars) with large eccentricity or high attitude, they will be affected by perturbations from the third body. These perturbations will also cause large long period variations in eccentricity and the decline of pericenter height  $h_p$ , and affect the lifetime of satellites. However, the dynamical mechanism of these perturbations is different from those of dissipative atmosphere drag or the non-spherical gravitation. This paper describes in detail such variations in eccentricity  $e$  and their roles in determining the lifetime of satellites.

**Key words:** space objects; eccentricity; non-spherical gravitation; third-body perturbation; orbit lifetime