

文章编号: 1000-8349(2006)02-0167-07



用切比雪夫曲线拟合导航卫星广播星历

陈刘成¹, 贾晓林², 莫中秋¹

(1. 北京环球信息应用开发中心, 北京 100094; 2. 西安测绘研究所, 西安 710054)

摘要: 提出用一种基于切比雪夫曲线多项式拟合的方法, 来拟合导航卫星广播星历。该方法对解决 GEO 导航卫星的小倾角、小偏心率问题特别有效, 并具有精度高、使用方便等特点。

关键词: 天体测量学; 切比雪夫曲线拟合; 广播星历; GEO

中图分类号: P129

文献标识码: A

1 引 言

导航卫星的广播星历是导航电文的重要内容, 它的表达形式、拟合精度、使用方法直接影响着导航系统的服务精度、导航参数注入频率、导航电文的数据量用户使用算法的复杂程度。从理想的目标来看, 导航卫星采用的导航电文应尽可能使用参数少、拟合精度高、外推能力强、用户算法简单的广播星历表达形式。

目前, 导航卫星星历的表达形式主要有两种: 参数拟合法和状态矢量积分法。其中参数拟合法又有多种形式, 典型的是 GPS 的开普勒轨道根数拟合法。该法基于分析法轨道解算理论, 把轨道参数在短期内的变化看成长期变化项和短周期变化项, 拟合精度高、外推能力强、用户算法简单, 但是它的形式不够灵活, 要求卫星受到的摄动力的主要部分具有 $1/2$ 轨道周期的特性。状态矢量积分法典型的应用就是 GLONASS 的星历表示, 它给出特定时刻的位置速度以及主要的加速度项, 并对时间进行积分获取所需时刻的卫星位置。这种方法形式灵活、参数内容较少, 但是外推能力比较差、用户算法相对复杂。理论上讲, 只要有足够的计算能力, 用户只需知道特定时刻的卫星位置速度, 就可以自行建立与卫星精密轨道预报相同的力模型, 进而外推积分得到高精度的卫星位置。如果用户不能获得与精密轨道确定完全一致的力模型, 则此时的卫星星历外推精度主要受力模型精度的影响, 而用户建立的力模型的主要误差为光压误差。假设相对光压误差为 5%, 以面质比为 $0.02(\text{m}^2/\text{kg})$ 、反射系数为 0.4 的卫星为例, 其力模型的最大绝对误差为 $1.2768 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$ 。若这一误差一直存在且集中在一个

收稿日期: 2005-10-10; 修回日期: 2005-11-22

方向上, 则用户计算的卫星位置在 5600 s 时间跨度内的最大三维位置误差小于 10 cm, 星历计算能够达到厘米级的位置精度。进一步说, 只要用户能够获得比较精确的卫星受力情况(包括机动力), 都可以通过建立力模型, 准确推算出卫星的位置。

卫星导航系统星座通常包括 MEO (中地球轨道)、IGSO (倾斜地球同步轨道)、GEO (地球静止轨道) 3 种轨道卫星。GPS 开普勒轨道根数拟合法因精度高、用户算法简单, 成为 MEO 和 IGSO 卫星星历拟合方法的首选。而 GEO 卫星存在小倾角、小偏心率问题, 其卫星轨道开普勒根数的物理意义不明确, 星历参数拟合精度差, 甚至无法拟合。另外, 对于 IGSO 卫星而言, 在较短的时间段内(例如 2 h), 由于存在 1:1 的共振项, 卫星轨道根数相关性较强, 轨道参数拟合精度较差, 需要延长拟合时间跨度, 或者减少拟合参数个数等^[1]。

对于小倾角、小偏心率 GEO 星历拟合, 有多种解决方法。如: (1) 采用 GLONASS 状态矢量积分法。在利用该法拟合星历时, 它的主要误差来自卫星受力描述的不准确, 也就是加速度拟合误差较大。为此, 可以使用类 GLONASS 星历表示法, 即在星历中增加 3 个参数, 以便更准确地描述加速度的变化, 从而得到较高的精度^[2]; (2) 采用 GPS 开普勒轨道根数拟合法。该法的主要问题是, 轨道倾角 i 的物理意义已经不明确。为此可以采用类 GPS 星历表示法, 即将轨道倾角参考面由赤道平面旋转角度 $n(n$ 一般取 $2^\circ \sim 5^\circ$), 在新的坐标系中进行参数拟合, 避免参数的奇异性^[1]。用户使用这种方法求出的坐标是在旋转以后的新参考系中的坐标, 必须再进行旋转才能获得所需要的地固系坐标。

由于上述两种方法的算法都比较复杂, 以及拟合和使用过程中的不方便, 本文提出了基于切比雪夫多项式拟合的星历参数拟合法。该法解算简单、使用方便, 对于 GEO 星历拟合具有明显的优势。但是对于 IGSO、MEO 来说, 需要增加参数个数才能达到与 GPS 轨道根数表示法相同的精度。

2 切比雪夫曲线拟合法

2.1 方法简介

设第 n 阶切比雪夫多项式以 $T_n(x)$ 表示:

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x), \quad x \in [-1, +1], \quad (1)$$

给定 n 组待拟合数据 (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n-1$; $-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} \leq +1$; x_i 为自变量, 定义

$$c_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) T_j(x_k) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left[\cos \left(\frac{\pi \cdot (k + \frac{1}{2})}{n} \right) \right] \cos \left(\frac{\pi \cdot j \cdot (k + \frac{1}{2})}{n} \right), \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

式中 $f(x_k)$ 为卫星在 $\frac{\Delta t \cdot x_k + (2t_0 + \Delta t)}{2}$ 时刻的位置坐标, t_0 为起始参考历元, Δt 为拟合数据时间跨度, 则切比雪夫曲线拟合结果为

$$f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k T_k(x) \right] - \frac{c_0}{2}. \quad (3)$$

如果以特定阶数 $m(m < n)$ 进行切比雪夫曲线拟合, 则近似取

$$f(x) \approx \left[\sum_{k=0}^{m-1} c_k T_k(x) \right] - \frac{c_0}{2}, \quad (4)$$

此时舍入误差为 $\sum_{k=m}^{n-1} c_k T_k(x)$ 。其中自变量 x 与实际时间 t 的对应关系为

$$x = \frac{2t - (2t_0 + \Delta t)}{\Delta t}, \quad t \in [t_0, t_0 + \Delta t]. \quad (5)$$

有关切比雪夫曲线拟合法的详细介绍, 请参见文献 [3,4]。

2.2 参数拟合精度分析

考虑 JGM2 20×20 阶地球重力场、日月引力、太阳光压等摄动因素, 在模拟生成 GEO、IGSO、MEO 卫星在地固系下的精密星历坐标时, 可以通过参数拟合形成星历参数, 利用星历参数解算卫星位置, 并且和对应时刻的原始坐标进行比较 (采样间隔为 1 min)。

(1) 5 阶 17 参数拟合 GEO 卫星广播星历精度 (x 方向的 c_j , $j = 0, 1, 2, 3, 4$; y 、 z 方向同, 起始参考历元 t_0 , 拟合时间跨度 $\Delta t = 2$ h)。

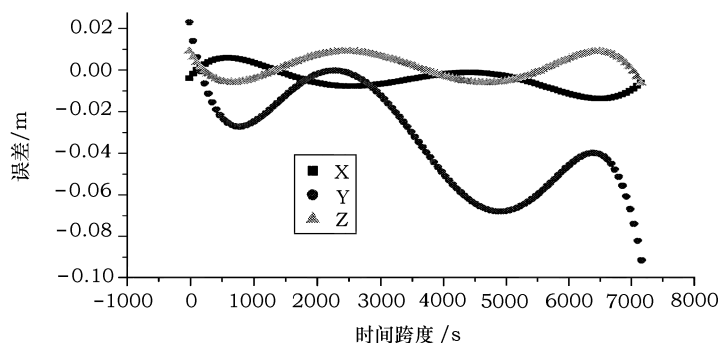


图 1 星历拟合的三维位置误差

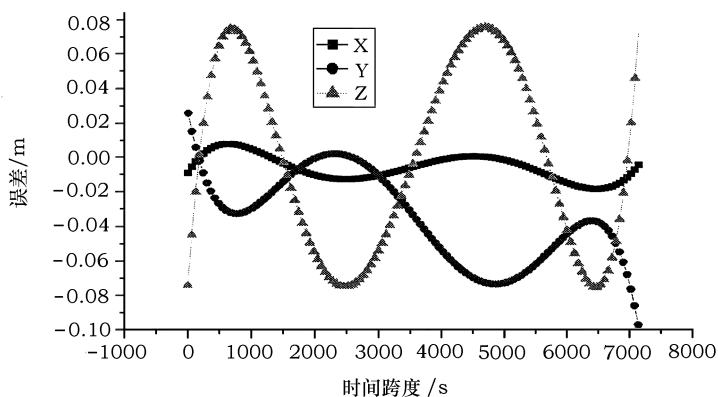


图 2 星历拟合的三维位置误差

图 1 是初始时刻开普勒根数为 42164142.1m、0.001、0.001°、100°、40°、100°，时间跨度 2 h 内星历拟合的三维位置误差。图 2 是初始时刻开普勒根数为 42164142.1、0.002、0.2°、100°、40°、100°，时间跨度 2 h 内星历拟合的三维位置误差。

(2) 8 阶 26 参数拟合 IGSO 卫星广播星历精度 (x 方向的 c_j , $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; y 、 z 方向同, 起始参考历元 t_0 , 拟合时间跨度 $\Delta t = 2$ h)。

图 3 是初始时刻开普勒根数为 42164142.1 m、0.0001、55°、100°、50°、10°，时间跨度 2 h 内星历拟合的三维位置误差。图 4 是初始时刻开普勒根数为 42164142.1、0.001、55°、100°、50°、10°，时间跨度 2 h 内星历拟合的三维位置误差。

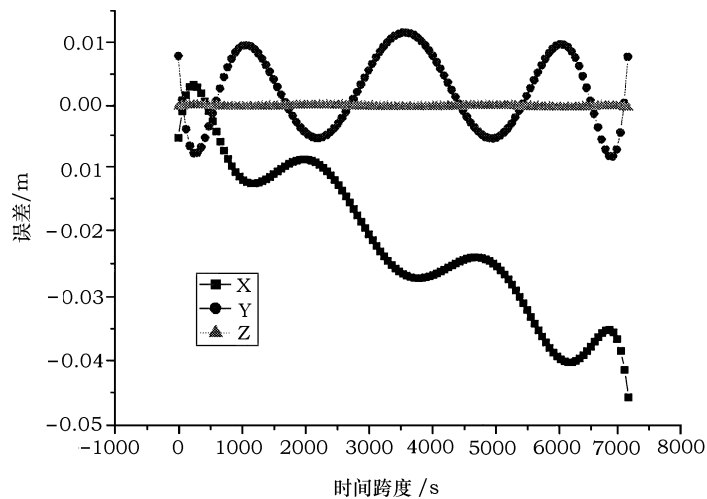


图 3 星历拟合的三维位置误差

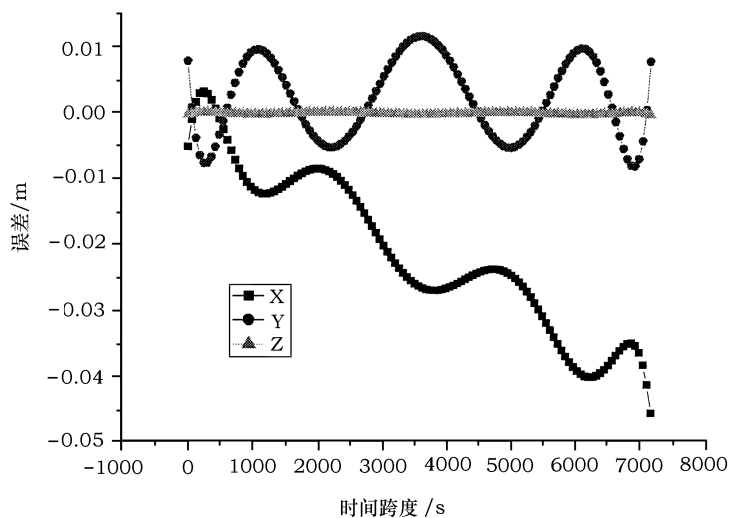


图 4 星历拟合的三维位置误差

(3) 8 阶 26 参数拟合 MEO 卫星广播星历精度 (x 方向的 c_j , $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; y 、 z 方向同, 起始参考历元 t_0 , 拟合时间跨度 $\Delta t = 2$ h)。

图 5 是初始时刻开普勒根数为 27907012.296 m、0.0001、 55° 、 100° 、 30° 、 233° , 时间跨度 2 h 内星历拟合的三维位置误差。图 6 是初始时刻开普勒根数为 27907012.296 m、0.001、 55° 、 100° 、 30° 、 233° , 时间跨度 2 h 内星历拟合的三维位置误差。

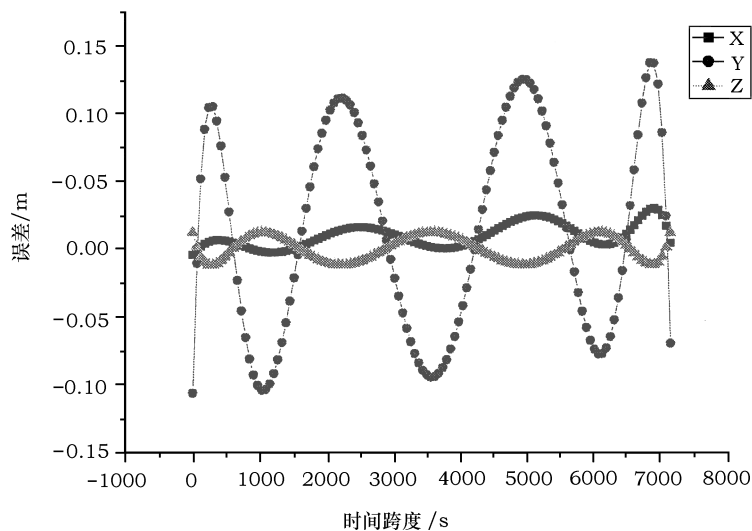


图 5 星历拟合的三维位置误差

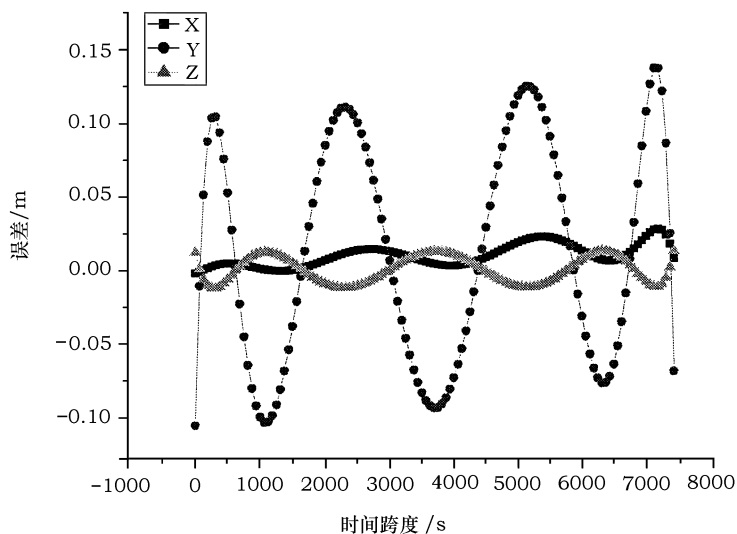


图 6 星历拟合的三维位置误差

2.3 自适应算法优化

由简单分析可以看出, 利用切比雪夫曲线拟合卫星位置时, 拟合时间越短, 拟合精度越

高。但是从系统需求的角度来看,在满足指标要求的情况下,拟合时间跨度应尽可能长。

为了达到上述目的,须优化切比雪夫曲线拟合算法。具体步骤如下:

- (1) 预设拟合的时间跨度(如设 $\Delta t = 180 \text{ min}$)和最大误差(位置精度)门限 ε ;
- (2) 对时间跨度内的历元数据进行切比雪夫曲线拟合,并输出最大的拟合误差 E_{\max} ;
- (3) 如果 $E_{\max} < \varepsilon$,则拟合成功,保存拟合参数。如果 $E_{\max} > \varepsilon$,则减小拟合时间跨度,

$\Delta t = \Delta t - \text{Interval}$ (Interval 为时间跨度微调量),再回到步骤(2),直到拟合成功。

这种算法实现简单,使用方便,可以保证在精度满足要求的情况下,拟合时间跨度达到最大,而且拟合精度可人为控制,必要时还可以增、减曲线的拟合次数,即增、减参数数量。

2.4 扩展分析

切比雪夫曲线拟合 GEO 卫星星历,实际上是对卫星轨迹的拟合。卫星运动越慢,变化越小,精度越高。由多组卫星实例分析结果可知,卫星的倾角、偏心率越小,拟合精度越高,可拟合时间跨度越长。即使在 GEO 卫星倾角达到 0.2° 、偏心率达到 0.002 (见图 2) 的极端情况时,这种拟合方法仍然可以达到较高的星历拟合精度。

在导航系统中, GEO 卫星需要频繁进行轨道机动,为了减少轨道机动对系统的消极影响,许多学者都在积极研究如何综合利用轨道机动前后的观测资料对机动力进行建模。从导航系统长远角度看,应该考虑轨道机动开始后的星历参数拟合问题。对于这一情况, GPS 的开普勒根数拟合法难以保证指标要求。而由于切比雪夫曲线拟合法是对卫星轨迹进行拟合,只要卫星运动范围和运动速度控制在一定范围之内,星历的拟合误差就不会显著增大。可见,切比雪夫法正好适合 GEO 卫星的运动特点。

导航卫星通信资源非常宝贵,因而导航卫星的星历播发有一定的字长限制。对于 GEO 卫星星历,其切比雪夫曲线拟合结果的参数系数 $|c_k|$ 的量级分别为: 10^4 km 、 10^2 km 、 1 km 、 10^2 m 、 1 m 。将 $|c_i|$ 用它的平方根表示 ($\sqrt{|c_i|}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$), 精确到毫米级,则分别需要用 34、28、24、20、12 bit 字长来表示(带 1 bit 符号位)。如果时间跨度 Δt 的单位为 0.1 h, 需要用 5 bit (0~3 h) 来表示时间跨度,则此种方法的总字长为 359 bit, 与目前 GPS 广播星历参数的总字长(350 bit)相当(两者都不含 toe)。

相应地,对于 IGSO、MEO 来讲,其 $|c_k|$ 量级分别为: 10^4 km 、 10^3 km 、 10^2 km 、 1 km 、 10^2 m 、 10 m 、 1 m , 需要用 34、33、28、28、24、20、17、12 bit 字长来表示(带 1 bit 符号位),总字长为 593 bit。

3 结 论

通过上述分析和计算,可以看到切比雪夫曲线拟合法具有如下特点:

- (1) 完全能满足导航系统对 GEO 卫星广播星历的精度要求;

- (2) 拟合求解和用户使用简单。用户可以仅通过公式 $f(x) \approx \left[\sum_{k=0}^{m-1} c_k T_k(x) \right] - \frac{c_0}{2}$ 来计算特

定时刻的卫星位置;

- (3) 参数数目为 16 (默认时间跨度 Δt) 或 17 个。在 GEO 卫星倾角较小时,还可以降低拟合多项式阶数(从 5 阶降到 4 阶),减少星历参数(从 16 或 17 个减到 13 或 14 个);

(4) 可用于 MEO、IGSO 卫星的星历参数拟合, 但要占用比较多的通信资源。

参考文献:

- [1] 黄勇. 天文学进展, 2006, 24(1): 81
- [2] 贾小林, 吴显兵, 崔先强. 测绘科学与工程, 2005, 25(1): 34
- [3] William H, Saul A, William T *et al.* Numerical Recipes in C, the second edition. Cambridge UK: the Press Syndicate of the University of Cambridge, 1998: 190~195
- [4] 徐士良. C 常用算法程序集, 第二版. 北京: 清华大学出版社, 1996: 220~222

Fitting the Broadcast Ephemeris of Navigation Satellites by Chebshev Approximation

CHEN Liu-cheng¹, JIA Xiao-lin², MO Zhong-qiu¹

(1. The Beijing Global Information Application and Development Center, Beijing 100094, China; 2. The Surveying and Mapping Research Institute, Xi'an 710054, China)

Abstract: A polynomial fitting method, Chebyshev approximation fitting is introduced here to generate the broadcast ephemeris of navigation satellites, which is suitable for small inclination and small eccentricity orbits. High precision and convenience for users are proved to be the outstanding characteristic of this method in this paper.

Key words: astrometry; Chebyshev curve fitting; broadcast ephemeris; GEO