

文章编号: 1000-8349(2006)01-0174-09



# 关于共线平动点的特征及其 在深空探测中的应用

刘 林<sup>1,2</sup>, 侯锡云<sup>1,2</sup>, 王海红<sup>1,2</sup>

(1. 南京大学 天文系, 南京 210093; 2. 南京大学 空间环境与航天动力学研究所, 南京 210093)

**摘要:** 系统阐述了小天体运动对应的圆型限制性三体问题共线平动点的强不稳定性特征, 以及其附近的条件周期轨道——晕轨道 (Halo Orbit) 的存在、相应解的构造。这种特殊的轨道形式和共线平动点附近的弱稳定走廊, 可分别用于在深空特殊位置附近定点有各种科学探测目标的探测器和向节能轨道过渡的通道。

**关键词:** 天体力学; 共线平动点; 航天器轨道力学; 深空探测; 晕轨道; 引力加速

**中图分类号:** P139; V412.4<sup>+</sup>1 **文献标识码:** A

## 1 引 言

圆型限制性三体问题 (CRTBP) 是研究太阳系中小天体运动的很好的力学模型, 它研究一个小天体  $P$  (小行星、自然卫星等) 在相互作用圆运动的两个大天体  $P_1$  和  $P_2$  (质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ ) 的引力作用下的运动规律, 其中小天体的质量  $m$  很小,  $m \ll (m_1, m_2)$ , 其对两个大天体的运动影响可以不考虑。对于这个力学系统, 在两个大天体的质心旋转坐标系 (简称会合坐标系) 中, 存在 3 个共线平动点<sup>[1]</sup>, 它们分布在两个大天体的连线 (即  $x$  轴) 上, 见图 1 中的  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ 。这 3 个共线平动点是 CRTBP 系统的平衡点, 相对两个大天体是静止的。但是, 它对应的 CRTBP 系统的这一特解是不稳定的。处于这几个点上的小天体, 在受到小扰动后即按指数规律远离这一平衡位置。因此, 在以往的太阳系动力学研究中, 无论从哪个角度来看, 这种平动点都不被人们所关心。随着航天时代的到来, 空间科学的发展和天文观测的需要使这几个平动点独特的空间位置及其强不稳定性特征显得尤为重要。

收稿日期: 2005-10-08; 修回日期: 2005-11-20

基金项目: 国家自然科学基金重大国际合作资助项目 (10073009)

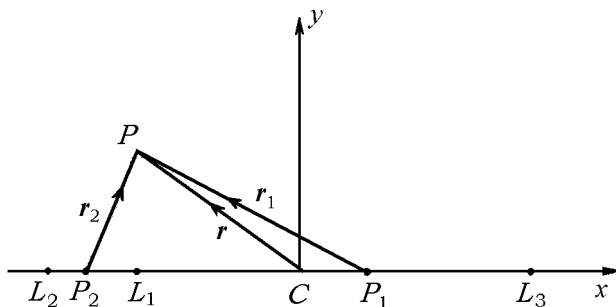


图 1 会合坐标系和 3 个共线平动点  $L_j(j=1, 2, 3)$

目前, 已有一系列探测器被发射到日-地系的共线平动点附近的晕轨道 (Halo Orbit) 上。所谓晕轨道, 是指围绕共线平动点而又避免蚀现象发生的相对共线平动点的条件周期轨道, 晕之称谓源自于从地球上看到的日晕或月晕现象。1978 年和 1983 年 NASA 发射的 ISEE-3 (International Sun-Earth Explorer 3), 先后进入日-地系的  $L_1$  和  $L_2$  点附近的晕轨道运行, 执行探测太阳风、宇宙射线和等离子体的任务。1995 年 NASA 发射的探测器 WIND, 进入日-地系  $L_1$  点附近的晕轨道, 监测太阳风。1996 年欧空局 (ESA) 与 NASA 联合发射的探测器 SOHO, 也定位在日-地系  $L_1$  附近的晕轨道上, 监控太阳活动。NASA 与 ESA 等还有一系列发射计划, 主要是为了满足空间天气预报和天文观测的需要。按照中国与俄罗斯等国的合作计划, 世界空间紫外天文台 (WSO/UV) 将被发射到日-地系  $L_2$  点附近的晕轨道上, 进行全天区的紫外观测。除日-地系外, 对月球的探测, 亦有类似考虑, 如在月球背面的地-月系  $L_2$  点附近的晕轨道上定点一探测器, 就可作为观测月球的中继站。

CRTBP 模型中的共线平动点是不稳定的, 但可以在其附近构造条件周期轨道 (即晕轨道) 或条件拟周期轨道 (Lissajous Orbit)。后者有蚀现象, 对上述空间探测器而言往往需要前者。那么晕轨道如何形成? 又如何保持? 参考文献 [2] 中已有系统阐述, 本文将结合该文及其所引文献、我们的系列工作 (参考文献 [3~5] 针对线性系统有些简单介绍), 对晕轨道的形成和保持作一综合介绍。

上述应用是针对共线平动点独特的空间位置, 设计一种克服其强不稳定性而形成的条件周期轨道, 使航天器可在这样的轨道上完成探测任务。而另一种应用则相反, 它充分利用共线平动点所具有的强不稳定性这一固有性质, 设计一种转移轨道, 使深空探测器可在低能情况下通过  $L_1$  或  $L_2$  点附近狭窄的弱不稳定走廊奔向目标轨道<sup>[6,7]</sup>。这是本文要阐述的第二方面的内容。

## 2 CRTBP 模型中共线平动点附近的运动与晕轨道

在会合坐标系  $O-xyz$  (见图 1) 中, 小天体的运动方程如下:

$$\begin{cases} \mathbf{r} + 2(-\dot{y}, \dot{x}, 0)^T = (\partial\Omega/\partial\mathbf{r})^T \\ \Omega(x, y, z) = (x^2 + y^2)/2 + (1 - \mu)/r_1 + \mu/r_2 \end{cases}, \quad (1)$$

其中  $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ ，且  $m_2 < m_1$ 。这一方程无量纲，对应的长度、质量和时间单位分别为

$$\begin{cases} [L] = \overline{P_1 P_2} & (\text{两个大天体之间的距离}) \\ [M] = m_1 + m_2 \\ [T] = \overline{P_1 P_2}^{3/2} / (G(m_1 + m_2))^{1/2} \end{cases} \quad (2)$$

虽然该系统的 3 个共线平动解不稳定，但可选取适当的初始扰动，使平动点附近的相对运动仍为周期轨道或拟周期运动，而不会远离平动点。

### 2.1 相对共线平动点运动的基本方程

事实上，可以将共线平动点附近的运动处理成相对共线平动点的运动。若记共线平动点  $L_j$  到距其最近的大天体 ( $P_1$  或  $P_2$ ) 的距离为  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ，分别对应 3 个共线平动点)，有<sup>[1]</sup>

$$\begin{cases} \gamma_1 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \dots\right] \\ \gamma_2 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \dots\right] \\ \gamma_3 = 1 - \nu \left[1 + \frac{23}{84}\nu^2 + \frac{23}{84}\nu^3 + \frac{761}{2352}\nu^4 + \frac{3163}{7056}\nu^5 + \dots\right], \quad \nu = 7\mu/12 \end{cases} \quad (3)$$

则 3 个共线平动点在会合坐标系中的坐标为

$$x_1 = -(1 - \mu) + \gamma_1, \quad x_2 = -(1 - \mu) - \gamma_2, \quad x_3 = \mu + \gamma_3. \quad (4)$$

由于是讨论相对共线平动点的运动，宜作如下坐标变换：坐标原点由两大天体的质心移至共线平动点  $L_j$  上，并将  $x$ 、 $y$  轴旋转  $180^\circ$ ，如图 2 所示。同时为了使共线平动点附近的

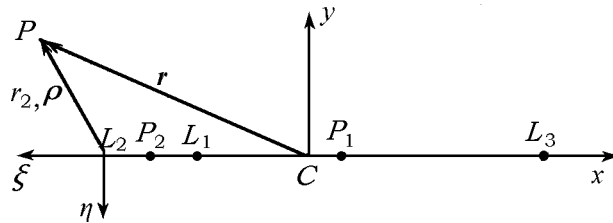


图 2 共线平动点坐标系  $L_j$ - $\xi\eta\zeta$  与坐标系  $C$ - $xyz$  的对应关系 (以  $j = 2$  为例)

运动图像清晰，需用一小的尺度因子  $\gamma_j$  将距离放大。在这一新坐标系  $L_j$ - $\xi\eta\zeta$  中，位置矢量  $\rho$  与原会合坐标系中位置矢量  $r$  有如下关系：

$$\rho = (\xi, \eta, \zeta)^T = -\frac{1}{\gamma_j} ((x - x_j), y, -z)^T, \quad (5)$$

其中  $x_j$  是共线平动点  $L_j$  在原会合坐标系中的坐标量。根据这一转换关系，即可给出新坐标

系中相对共线平动点运动的运动方程<sup>[3,8]</sup>:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - (1 + 2c_2)\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{n \geq 3} c_n(\mu) \rho^n P_n \left( \frac{\xi}{\rho} \right) \\ \dot{\eta} + 2\dot{\xi} - (1 - c_2)\eta = \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{n \geq 3} c_n(\mu) \rho^n P_n \left( \frac{\xi}{\rho} \right) \\ \ddot{\zeta} + c_2\zeta = \frac{\partial}{\partial \zeta} \sum_{n \geq 3} c_n(\mu) \rho^n P_n \left( \frac{\xi}{\rho} \right) \end{cases}, \quad (6)$$

其中  $c_n(\mu)$  和  $C_2$  对  $j = 1, 2$  有

$$\begin{cases} c_n(\mu) = \frac{1}{\gamma_j^3} \left[ (\pm 1)^n \mu + (-1)^n (1 - \mu) \left( \frac{\gamma_j}{1 \mp \gamma_j} \right)^{n+1} \right] & (n \geq 3) \\ c_2(\mu) = \frac{1}{\gamma_j^3} \left[ \mu + (1 - \mu) \left( \frac{\gamma_j}{1 \mp \gamma_j} \right)^3 \right] = \frac{\mu}{\gamma_j^3} + \frac{(1 - \mu)}{(1 \mp \gamma_j)^3} \end{cases}, \quad (7)$$

式中符号“ $\pm$ ”和“ $\mp$ ”，各对应  $j = 1$  和  $2$ ，即  $L_1$  和  $L_2$ 。对  $j = 3$ ，有

$$\begin{cases} c_n(\mu) = \frac{1}{\gamma^3} \left[ (1 - \mu) + \mu \left( \frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)^{n+1} \right] & (n \geq 3) \\ c_2(\mu) = \frac{1}{\gamma^3} \left[ (1 - \mu) + \mu \left( \frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)^3 \right] = \frac{(1 - \mu)}{\gamma^3} + \frac{\mu}{(1 + \gamma)^3} \end{cases}. \quad (8)$$

## 2.2 共线平动点附近的运动

### (1) 线性情况

线性化模型对应的动力学方程即为 (6) 式的齐次形式:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - (1 + 2c_2)\xi = 0 \\ \dot{\eta} + 2\dot{\xi} - (1 - c_2)\eta = 0 \\ \ddot{\zeta} + c_2\zeta = 0 \end{cases}, \quad (9)$$

上式对应的 3 对特征值分别为  $\pm d_1$ ， $\pm id_2$ ， $\pm id_3$ ，其中

$$d_1 = \sqrt{\left( \sqrt{9c_2^2 - 8c_2 + c_2 - 2} \right) / 2}, \quad d_2 = \sqrt{\left( \sqrt{9c_2^2 - 8c_2 - c_2 + 2} \right) / 2}, \quad d_3 = \sqrt{c_2}. \quad (10)$$

相应的解有如下形式:

$$\begin{cases} \xi = C_1 e^{d_1 t} + C_2 e^{-d_1 t} + C_3 \cos d_2 t + C_4 \sin d_2 t \\ \eta = \alpha_1 C_1 e^{d_1 t} - \alpha_1 C_2 e^{-d_1 t} - \alpha_2 C_3 \sin d_2 t + \alpha_2 C_4 \cos d_2 t \\ \zeta = C_5 \cos d_3 t + C_6 \sin d_3 t \end{cases}, \quad (11)$$

其中

$$\alpha_1 = (d_1^2 - 2c_2 - 1) / 2d_1, \quad \alpha_2 = (d_2^2 + 2c_2 + 1) / 2d_2, \quad (12)$$

$C_i (i = 1, 2, 3, \dots, 6)$  是由初始条件确定的积分常数。由于  $d_1 > 0$ , 解中存在指数发散项, 因此线性化解是不稳定的 (即使考虑高次项影响后运动仍为不稳定的)。尽管如此, 当初始状态量满足一定条件时, 可使  $C_1 = C_2 = 0$ 。此时 (11) 式表示的运动一般为拟周期运动, 这些拟周期运动构成了线性化系统的二维环面, 可表示为下列形式:

$$\begin{cases} \xi(t) = \alpha \cos(\omega_0 t + \phi_1) \\ \eta(t) = \kappa \alpha \sin(\omega_0 t + \phi_1) \\ \zeta(t) = \beta \cos(\nu_0 t + \phi_2) \end{cases}, \quad (13)$$

其中,  $\alpha$  和  $\beta$  分别为平面和垂直振幅,  $\kappa = -\alpha_2$ ,  $\omega_0 = d_2$ ,  $\nu_0 = d_3$ ,  $\phi_1$  和  $\phi_2$  为初始相位角。满足  $C_1 = C_2 = 0$  的初始条件为

$$\dot{\xi}_0 = d_2 \eta_0 / \alpha_2, \quad \dot{\eta}_0 = (-\alpha_2 d_2) \xi_0. \quad (14)$$

对于日-地系和地-月系,  $\omega_0$  与  $\nu_0$  均不通约, 因此 (13) 式描述在空间中的一条 Lissajous 轨道。

上述结果是在线性化模型下给出的。在考虑了高次项后, 这些二维环面将破裂, 即满足 (14) 式初始条件对应的拟周期轨道并不能使探测器长期围绕在共线平动点附近运动而不远离。由于共线平动点具有强不稳定性 (按指数规律发散), 它往往会使探测器快速远离。当然, 可以频繁地按条件 (14) 进行轨控, 使探测器不远离平动点, 但这样耗能太大<sup>[3~5]</sup>, 而且 Lissajous 轨道往往不是所需要的目标轨道。因此有必要进一步考虑高次项的影响来构造较“稳定”的晕轨道。

## (2) 非线性情况

由动力系统知识可知, 当方程 (9) 加上高次项摄动后, 系统原有的二维环面将破裂 (即原有的条件周期或拟周期轨道不复存在), 但仍有部分二维环面在高次项摄动下保持。即考虑了高次项摄动后, 系统仍旧存在条件周期或拟周期轨道, 这些轨道对应的初始条件相对于线性化模型下的初始条件有一定程度的改变, 其改变大小取决于高次项的大小。

考虑方程 (6) 右端的高次项的特点, 相应的解仍然可以构造, 但需重新寻找消除不稳定项所对应的初始条件, 这很复杂。直接去找条件周期解显得更有意义, 如采用 Lindstedt-Poincaré 方法, 即将条件周期解或拟周期解展开成三角级数的形式, 然后代入包含所考虑的高次项的运动方程, 确定相应三角级数中各项的系数<sup>[8]</sup>。用此方法可以构造高阶 Lissajous 轨道 (条件拟周期轨道), 亦可构造高阶晕轨道 (条件周期轨道)<sup>[2,3]</sup>。当然, 人们感兴趣的还是晕轨道。考虑方程 (6) 右端的高次项后, 在一定的初始条件下, 晕轨道的解可写成如下形式:

$$\begin{cases} \xi(t) = \sum_{i,j} \left( \sum_{|k| \leq i+j} \xi_{ijk} \cos(k\theta) \right) \alpha^i \beta^j \\ \eta(t) = \sum_{i,j} \left( \sum_{|k| \leq i+j} \eta_{ijk} \sin(k\theta) \right) \alpha^i \beta^j \\ \zeta(t) = \sum_{i,j} \left( \sum_{|k| \leq i+j} \zeta_{ijk} \cos(k\theta) \right) \alpha^i \beta^j \end{cases}, \quad (15)$$

其中  $\theta = \omega t + \phi$ , 这里求和  $\sum_{i,j}^{\infty}$  中,  $i, j \geq 0$ ,  $i + j \geq 1$ ,  $n = i + j$  称为解的阶数。高阶解可由低阶解逐次生成, 只有  $\alpha$  和  $\beta$  的某些特定组合才能生成晕轨道。Richardson<sup>[9]</sup> 给出了晕轨道的三阶分析解, 其结果如下:

$$\begin{cases} \xi = -\alpha \cos \tau + a_{21}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + (a_{23}\alpha^2 - a_{24}\beta^2) \cos 2\tau \\ \quad + (a_{31}\alpha^3 - a_{32}\alpha\beta^2) \cos 3\tau \\ \eta = k\alpha \sin \tau + (b_{21}\alpha^2 - b_{22}\beta^2) \sin 2\tau + (b_{31}\alpha^3 - b_{32}\alpha\beta^2) \sin 3\tau, \\ \quad + [b_{33}\alpha^3 + (b_{34} - b_{35})\alpha\beta^2] \sin \tau \\ \zeta = \beta \cos \tau + d_{21}\alpha\beta(\cos 2\tau - 3) + (d_{32}\beta\alpha^2 - d_{31}\beta^3) \cos 3\tau \end{cases} \quad (16)$$

其中  $\tau = \omega t + \phi$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \dots$ ,  $\omega_i$  表示  $\alpha$ 、 $\beta$  的  $i$  阶量, 有  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = s_1\alpha^2 + s_2\beta^2$ ,  $s_1$ 、 $s_2$  的具体形式及解 (16) 中各项系数的表达式见文献 [9]。

这里要说明一点, 即使考虑真实力模型 (除完整的 CRTBP 模型中力因素外, 还考虑了其他大天体的引力作用), 在原 CRTBP 模型中的  $L_2$  点附近亦可构造出晕轨道, 但有一定的“宽度”, 接近原 CRTBP 模型下的三阶晕轨道 (见第 3 节的图 6), 不妨称其为拟晕轨道。

### 3 晕轨道的保持

上述三阶轨道可作为目标轨道, 但仍是真实力学系统下的近似解, 必须加以轨控。轨控可

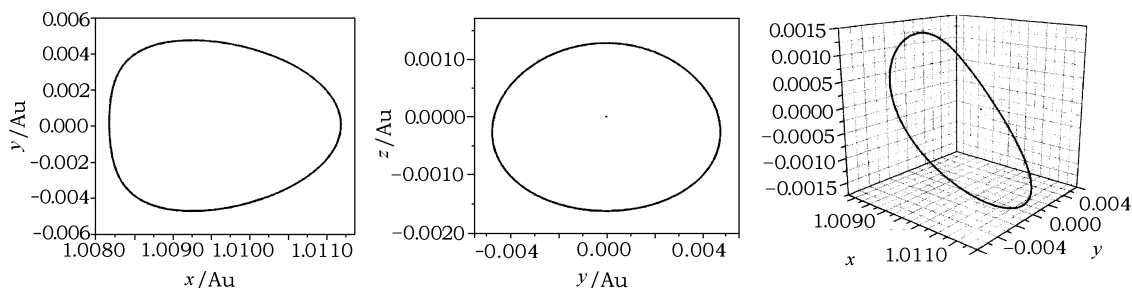


图 3 日-地系  $L_2$  附近的一条晕轨道 ( $\alpha = 0.15$ ,  $\beta = 0.16$ )

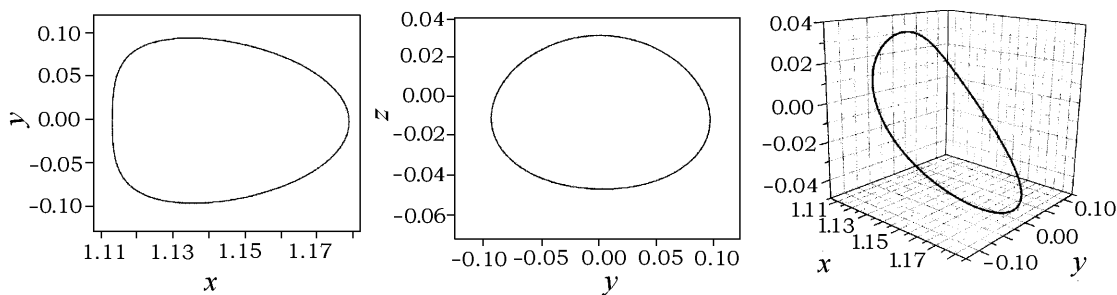


图 4 地-月系  $L_2$  附近的一条晕轨道 ( $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.034$ )

以采用瞬时喷气控制方案,也可采用小推力连续喷气控制方案。我们采用了线性反馈思想给出了一种小推力控制方案<sup>[10]</sup>。数值模拟表明,采用这种方案确实能使航天器定点在 $L_2$ 点附近的晕轨道上。

图3和图4分别给出了会合坐标系中,日-地系和地-月系 $L_2$ 点附近的一条三阶晕轨道。图3中,轨道的大小在日-地系中相当于 $x$ 方向振幅为 $2.25 \times 10^5$  km, $y$ 方向上振幅为 $6.75 \times 10^5$  km, $z$ 方向的振幅为 $2.6 \times 10^5$  km。图4表示的轨道在地-月系中的大小相当于 $x$ 方向振幅为 $1.29 \times 10^4$  km, $y$ 方向上振幅为 $3.76 \times 10^4$  km, $z$ 方向振幅为 $2.2 \times 10^3$  km。

日-地系 $L_2$ 点附近的晕轨道运行10 yr的图像由图5和图6所示,运行过程中均经过多次轨控。图5中的晕轨道是用CRTBP模型给出的三阶近似解作为完整力模型下的目标轨道,再用小推力控制的结果,每18 d控制一次,总的能量消耗相当于速度增量2226.16786 m/s。图6是直接采用真实力模型构造的拟晕轨道作为目标轨道,在与上述同样条件下,其总的能量消耗只相当于速度增量0.6760 m/s,几乎不需要控制,即可使晕轨道保持。

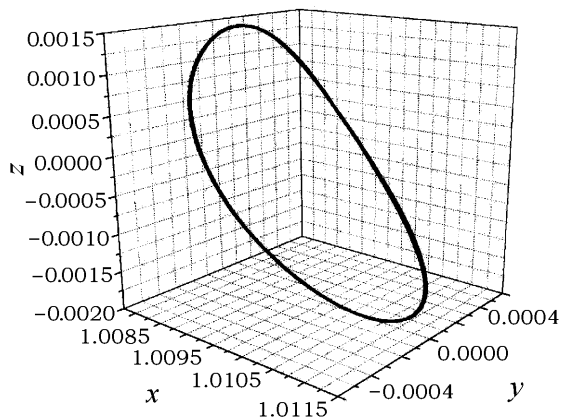


图5 日-地系 $L_2$ 附近一条控制后的轨道

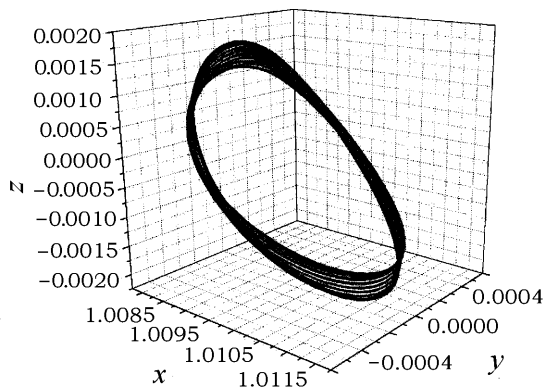


图6 日-地系 $L_2$ 附近又一条控制后的轨道

#### 4 轨道过渡中引力加速的一种节能机制

轨道过渡可以借助第三体的引力加速,使探测器在节能条件下到达目标天体。其中探测器与第三体必须有特殊的相对位置,这不难理解,在此不作讨论。下面将针对月球探测(也称为亚深空探测)和行星际探测,分别阐述轨道过渡中的另一种特殊形式,即如何利用共线平动点的强不稳定性,借助于共线平动点 $L_1$ 和 $L_2$ 附近的“狭窄走廊”飞向目标天体的节能机制。

##### (1) 地月系中的过渡问题

从低地球轨道(LEO)或地球同步转移轨道(GTO)上经变轨向目标天体(月球)过渡,若采用脉冲式的大推力过渡(如Hohmann轨道转移),所需能量较大,相应的Jacobi常数 $C$ 较小,往往比临界值 $C_1$ 小得多,相应的原分别包围地球和月球的零速度面不仅已连通,且共线平动点 $L_1$ 附近的走廊大大敞开,具体可参见参考文献[1]的第四章和[3]的第七章。

如果采用低能量的奔月方式,只要过渡轨道的初始速度,使相应的Jacobi常数 $C$ 稍小于

临界值  $C_1$ ，此时上述两个零速度面即可连通，并从平动点  $L_1$  处稍稍打开一个“狭窄走廊”，探测器就有可能越过这一通道奔向月球。但要注意， $L_1$  处有一个狭窄通道是探测器可以越过该通道奔向月球的一个必要条件，而不是充分条件，还要看转移轨道的起始状态，即必须从一条特殊的转移轨道上进入这一通道，相应的转移轨道可以利用稳定流形来构造。经数值试验，从  $L_1$  点沿内稳定流形反向积分，经几个月球绕地球运动周期的间隔后，探测器只能“返回”离地球约为 0.35 个地月距离处（这是一个算例）。根据这一状态，若转移轨道要在地球附近起航，可增加一次机动，其条件可由上述反向积分获得，在离地球 0.35 个地月距离处加一次机动（反向），使其接近地球，找出适当的初始转移轨道。曾有人采用这种转移方式进行过仿真计算<sup>[7]</sup>，结果所耗能量比大推力过渡（例如 Hohmann 转移轨道）方式明显节能，但转移时间较长。这主要由近地转移所制约。若从远地（如离地球  $6 \times 10^4$  km 的远地点）起航进入特定的转移轨道，则既可节省能量，过渡时间也不会太长。至于如何选择转移轨道，是否要采用借力加速的节能方式，对转移时间的长短如何选择等，要根据具体的航天任务而定，在众多约束（包括节能）前提下选优。

## (2) 行星际过渡问题

在行星际过渡中，同样可借助共线平动点附近的通道，采取节能式的过渡。如果说上述奔月是利用内 Lagrange 点  $L_1$ ，那么行星际转移将利用外 Lagrange 点  $L_2$ ，此时初始状态对应的 Jacobi 常数  $C$  满足条件  $C_3 < C < C_2$ ，其中  $C_2$  和  $C_3$  是另外两个 Jacobi 常数的临界值。具体情况请参见参考文献 [1,3]。如果从地球到火星的过渡，出发的转移轨道是通过日-地系对应的  $L_2$  点的不稳定流形，则到达火星附近的转移轨道是通过日-火系对应的  $L_2$  点的稳定流形，见图 7。

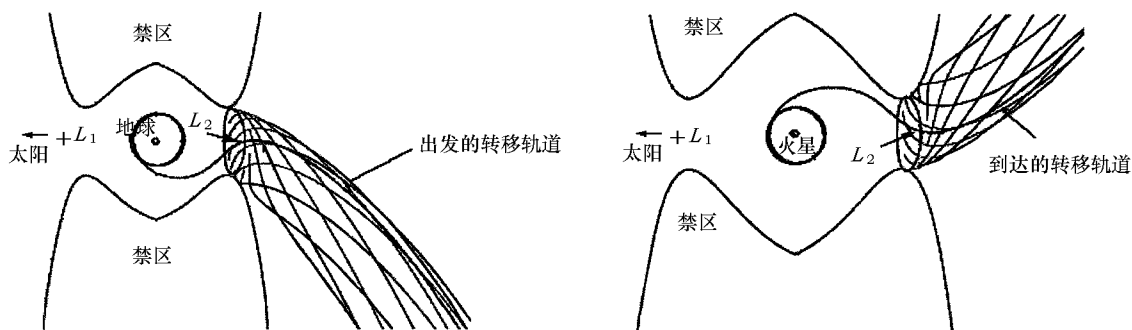


图 7 地球到火星的过渡中出发和到达的转移轨道示意图

上述两类探测背景下的节能式轨道过渡，都是利用共线平动点  $L_1$  和  $L_2$  的动力学特征获得的。尽管这是在限制性三体问题（更确切地说，是在圆型限制性三体问题）前提下而不是真实动力学模型下得出的结论，但它毕竟是一种较好的近似力模型动力学机制的反映。对于实际问题，上述结果可以作为低能过渡轨道（转移轨道）设计的初选。

## 5 结 语

在深空探测中，相对于质量可以忽略不计的航天器基本上处于两个大天体引力作用下的



动力学环境, 而太阳系的现实是各有关天体的轨道偏心率都较小。因此, 引用圆型限制性三体问题 (CRTBP) 作为基本动力学模型确实是有实际意义的, 在此基础上, 利用该动力学系统中 3 个共线平动点独特的几何位置和不稳定 (可以是条件稳定) 性特征, 实现特殊探测器的空间定位和节能过渡, 确实引起了当今航天界有关领域的关注。

### 参考文献:

- [1] Szebehely V. *Theory of Orbits*, New York, London: Academic Press, 1967: 231~308
- [2] Gómez G, Jorba A, Simó C. *Dynamics and Mission Design Near Libration Points*, Vol. I Fundamentals: The Case of Collinear Libration Points; Vol. II: Advanced Methods for Collinear Points, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2001
- [3] 刘林, 侯锡云. 轨道力学 (研究生教材), 南京大学: 南京大学天文系, 2005: 40~92
- [4] Wang H, Liu L, Hu S. In: Montenbruck O, Battrick B eds. *Proceeding of the 18th International Symposium on Space Flight Dynamics*, Munich: ESA Publication Division, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 2004 (ESA SP-548): 589
- [5] 刘林, 侯锡云, 王建峰等. *天文学进展*, 2005, 23(2): 180
- [6] Koon W S *et al.* *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2001, 81: 63
- [7] Topputo F, Vasile M, Bernelli F. In: Montenbruck O, Battrick B eds. *Proceeding of the 18th International Symposium on Space Flight Dynamics*, Munich: ESA Publication Division, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 2004 (ESA SP-548): 583
- [8] Jorba A, Masdemont J. *Phys. D*, 1999, 132: 189
- [9] Richardson D L. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 1980, 22: 232
- [10] Hou X Y, Wang H H, Liu L. *ChJAA*, 已接受

## On Characteristics of Collinear Libration Points and Their Applications in Deep Space Exploration

LIU Lin<sup>1,2</sup>, HOU Xi-yun<sup>1,2</sup>, WANG Hai-hong<sup>1,2</sup>

(1. *Astronomy Department, Nanjing University, Nanjing 210093, China*; 2. *Institute of Space Environment and Astronautics, Nanjing University, Nanjing 210093, China*)

**Abstract:** In this paper we give a systematic formulation of the special position and strongly unstable dynamical characteristics of the collinear libration points of the Circular Restricted Three-Body Problem which is useful in the study of motion of small bodies. We state the possibility of existence of conditionally periodic orbits (Halo Orbits) and give out these orbits, including lower order solutions and higher order solutions. These special periodic orbits can be used as nominal orbits for kinds of spacecrafts with different scientific goals, while the weak stability corridors associated with the collinear libration points can be used as ones for spacecrafts with less fuel demand.

**Key words:** celestial mechanics; collinear libration point; spacecraft orbit dynamics; deep space exploration; Halo Orbit; gravity assist