

文章编号: 1000-8349(2006)02-0142-18

# 三点相关函数研究进展

侯永辉<sup>1,3</sup>, 邹 华<sup>2</sup>

(1. 中国科学技术大学 天体物理中心, 合肥 230026; 2. 河海大学 理学院, 南京 210098; 3. 中国科学院 上海天文台, 上海 200030)

**摘要:** 三点相关函数或傅里叶空间的重谱 (bispectrum) 是研究由引力不稳定性演化产生的大尺度结构非高斯性质的最低阶统计量。介绍了相关函数的基本理论知识; 结合观测和数值模拟的测量结果, 以及暗晕模型预言的三点相关函数, 阐述了三点相关函数及其傅里叶变换的重谱的研究进展。

**关键词:** 天体物理学; 三点相关函数; 综述; 大尺度结构; 统计性质

**中图分类号:** P159.5 **文献标识码:** A

## 1 引 言

在宇宙学特别是观测宇宙学研究中大尺度星系红移巡天具有非常重要的作用。通过研究星系样本的统计性质能给出宇宙中的物质在引力作用下的成团趋势, 并且可以用来确定宇宙学参数。依赖于暗物质和宇宙学常数的不同宇宙学模型预言了宇宙结构的不同演化方式, 于是可以通过宇宙学模型和巡天样本数据的比较, 拟合出宇宙学模型的参数, 这些宇宙学参数包括: 暗物质密度 ( $\Omega_m$ )、重子物质密度 ( $\Omega_b$ )、哈勃常数 ( $h$ )、初始谱指数 ( $n$ ) 等。

统计分析在研究宇宙学大尺度结构时占有非常重要的地位, 常用的几个统计方法有:  $N$  体相关函数、功率谱分析、空洞几率函数、Minimal-spanning trees、Percolation analysis、Topological analysis。每一种方法都有它的优势和缺点, 在研究大尺度结构的统计性质时, 它们可以互补。其中最常用到的两种方法是  $N$  体相关函数和功率谱分析。

宇宙的大尺度结构是由于初始密度扰动在引力不稳定性作用下增长、成团而形成的。引力成团是一个非线性的过程, 当扰动足够小时, 结构的演化可以用扰动理论来描述, 一个具有高斯分布的物质场仍会保持高斯分布; 随着扰动的增长, 即使物质的初始分布是高斯的, 非线性引力成团也会使其分布产生非高斯特征, 使扰动理论逐渐不能适用, 只能借助于数值模拟来研究物质的演化。

在研究密度场的统计性质时,  $N$  点相关函数作为一个重要的工具被广泛地应用于理论模

---

收稿日期: 2005-10-11; 修回日期: 2005-11-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (105730155)

型和观测星表中<sup>[1]</sup>。对于一个高斯随机场，两点相关函数或者它的傅里叶形式、功率谱，能完全描述其统计性质，所有的高阶相关函数都为零，但是描述非高斯场的统计性质时则需要考虑所有的高阶统计性质<sup>[1~3]</sup>。

三点相关函数或傅里叶空间的重谱是研究由引力不稳定性演化产生的大尺度结构非高斯性质的最低阶统计量。弱线性区域的重谱可以用扰动理论来研究，扰动理论能很好地给出物质在大于 10 Mpc/h 时的成团性质。扰动理论预言，实空间的三点相关函数<sup>[4~7]</sup>和傅里叶空间的重谱<sup>[8~9]</sup>都依赖于线性功率谱的形状和三角形的形状。星系的重谱包含密度场的初始扰动和星系偏袒的信息<sup>[11~16]</sup>，可以用来消除红移巡天动力学分析中线性偏差和物质密度参数  $\Omega_m$  之间的简并<sup>[8,9,14,15,17]</sup>。目前利用几个比较大的星系巡天 (Automatic Plate Measuring Survey<sup>[7,18]</sup>、IRAS<sup>[19]</sup>、2DFGRS<sup>[16]</sup>Sloan Digital Sky Survey<sup>[20]</sup>) 已经开始测量星系的偏袒参数。

目前定量地描述非线性区域的三点相关函数或重谱主要还是依赖于  $N$  体数值模拟。Scoccimarro 和 Frieman<sup>[10]</sup> (下文中简称 SF99) 在数值模拟的基础上拟合了一个适用于与尺度无关的宇宙学模型的经验公式，后来 Scoccimarro 和 Couchman<sup>[21]</sup> 又将其推广为适用于冷暗物质宇宙学模型的经验公式。但这些公式在非线性区域都作了很强的假设。Hou 等人<sup>[22]</sup> 在 2005 年提出了一个新的测量方法，它可以将测量的重谱拓展到非常小的尺度。利用高精度的数值模拟，他们发现 Scoccimarro 和 Couchman<sup>[21]</sup> 的假设是不准确的，他们在测量结果的基础上给出了适用于初始谱指数范围为  $-2 \leq n \leq 0$  时重谱的经验公式。另外在研究引力成团时，晕模型的建立和发展，使得人们可以用晕模型来预言三点相关函数或重谱<sup>[23~26]</sup>。Takada 和 Jain<sup>[25]</sup> 发现利用晕模型预言的三点相关函数在线性和非线性区域能较好地符合 Jing 和 Börner<sup>[27]</sup> 利用数值模拟测量的结果，但是在准线性区域存在较大的偏差，他们认为三点相关函数在准线性区域对晕边界的定义比较敏感，这可能正是晕模型在准线性区域不能成功预言三点相关函数的原因。暗晕模型现在还存在很大的不确定性，这导致利用暗晕模型来预言重谱还存在诸多的不确定性。

弱引力透镜中的剪切因子 (cosmic shear) 和会聚因子 (convergence) 的三点相关函数、孔径质量 (Aperture mass) 的三阶矩以及欹斜度 (skewness) 都直接依赖于物质的重谱。Scoccimarro 和 Frieman<sup>[10]</sup> 的经验公式已经被运用于计算弱引力透镜巡天的会聚场 (convergence field) 的欹斜度<sup>[28,29]</sup>。目前的弱引力透镜巡天已经可以测量到透镜剪切场 (shear field) 的欹斜度<sup>[30,31]</sup>，不久以后足够大的弱引力透镜的巡天可以测量到宇宙剪切场的三点相关<sup>[32,33]</sup>。重谱的这些应用，促使人们建立一个同时适用于弱线性区域和强非线性区域的重谱模型，虽然 Hou 等人<sup>[22]</sup> 构建了一个更精确的重谱的经验公式，但是这个公式还不能直接应用于预言冷暗物质主导宇宙的重谱性质。这就需要在高精度数值模拟的测量结果和暗晕模型预言结果的基础上，构建一个适用于不同宇宙学模型的重谱的经验公式。

## 2 相关函数观测结果

### 2.1 两点相关函数

两点相关函数与在体积  $dV_1$  的  $r_1$  处和体积  $dV_2$  的  $r_2$  处各发现一个粒子的联合概率  $d^2P$

有如下关系:

$$d^2P = n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2)[1 + \xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]dV_1dV_2, \quad (1)$$

其中  $n(\mathbf{r})$  是粒子的平均数密度,  $\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  就是两点相关函数。在大尺度结构的研究中, 宇宙学原理告诉我们两点相关函数只是粒子对间距 ( $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ ) 的函数, 也就是说  $\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \xi(r_{12})$  [34]。

在测量实际观测样本的两点相关函数时, 首先要产生具有和观测样本相同边界和选择效应的随机样本, 用  $DD(r)$  表示在  $r \sim r + \Delta r$  范围内观测样本的粒子对,  $RR(r)$  为相应随机样本的粒子对。将方程 (1) 积分就可以得到

$$\xi(r) = \frac{DD(r)}{RR(r)} - 1. \quad (2)$$

方程 (2) 说明两点相关函数描述的是在  $r$  尺度上观测样本相对随机样本的过剩粒子对, 它反映了物质在该尺度上的成团强度。

从星系巡天发现, 星系的两点相关函数可以表示成幂律的形式,  $\xi(r) = Br^\gamma = (r/r_0)^\gamma$ , 其中  $r_0$  是相关长度, 它越大表示星系的成团性越强。值得注意的是, 不同的星系巡天给出的相关长度  $r_0$  也不太一样, 但  $\gamma$  的差别不大, 均在  $-1.7$  到  $-1.86$  之间。相关长度与所选取的星系样本有关, 表 1 给出了部分巡天的结果 [35,36,38~41]。

表 1 不同红移巡天给出的星系相关函数 [35,36,38~41]

巡天	$N_{\text{gal}}$	$r_0$	$\gamma$
SDSS	29300	$6.14 \pm 0.18$	$-1.75 \pm 0.03$
2dF	15123	$4.92 \pm 0.27$	$-1.71 \pm 0.06$
LCRS <sup>1)</sup>	26400	$5.06 \pm 0.12$	$-1.86 \pm 0.03$
PSCZ <sup>2)</sup>	15400	3.7	-1.69
CfA2 <sup>3)</sup>	12800	5.8	-1.8

注: 1) LCRS 即 Las Comapanas Redshift Survey; 2) PSCZ 即 Point Source Catalogue Survey; 3) CfAZ 即 Center for Astrophysics Redshift Survey。

Börner 等人 [42] 和 Xia 等人 [43] 在上世纪就利用 CfA 星系巡天研究了星系分布对光度的依赖关系, 发现星系越亮其成团性越强。Loveday 等人 [44] 测量 APM 巡天星系的两点相关也得到了类似的结论, 同时他们发现早型星系的成团性更强。目前的星系巡天能观测到更暗的星系, Norberg 等人 [45] 在 2002 年利用 2dF 的观测样本发现星系的相关长度与光度存在非常明显的相关。Zehavi 等人 [41] 分析 SDSS 的数据发现星系的成团性与颜色也存在很强的相关, 颜色越红的星系成团性越强, 这是因为大部分的红星系都处于星系群及星系团中。

## 2.2 功率谱分析

功率谱即为两点相关函数的傅里叶变换,

$$P(k) = \frac{1}{V_\mu} \int_{V_\mu} \xi(r) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3)$$

它依赖于物质密度、哈勃常数、重子密度和带质量中微子、初始谱指数等, 是研究物质成团时一个非常重要的工具。通过测量星系的三维功率谱可以很好地限定宇宙学参数。

图 1 给出了 Tegmark 等人<sup>[46]</sup> 利用 SDSS 的 205443 个星系测量的星系功率谱。在测量过程中他们分析了星系偏袒因子对光度的依赖关系, 发现越亮的星系偏袒因子越大。由于星系成团对光度的这种依赖关系, 使得偏袒因子在大尺度上产生依赖于尺度的虚假效应。图 1 中的功率谱已经校正了这种效应, 即用测量的功率谱除以图 1 上方小图中的实线平方, 也就是说, 图 1 给出的是绝对星等为  $-20.83$  的星系的功率谱。对于一个随机分布的高斯场, 两点相关函数或其傅里叶空间的功率谱能完全描述其统计性质, 所有的高阶相关函数都为零。要了解非高斯场的统计性质则需要考虑所有的高阶相关函数<sup>[1,8,47]</sup>。星系、星系团、星系团丰度、类星体、 $\text{Ly}\alpha$  吸收线等的高阶矩包含了更丰富的宇宙学信息, 这有助于了解星系的 biasing 和非线性红移畸变, 从而可以减小星系红移巡天的系统误差。

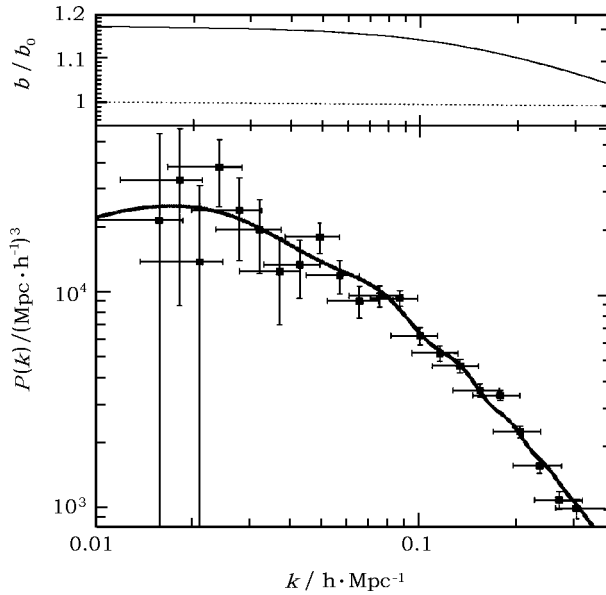


图 1 SDSS 星系巡天测量的星系的功率谱<sup>[46]</sup>

带误差棒的点是测量结果, 实线是拟合出的宇宙学模型预言结果。

### 2.3 三点相关函数

类似于两点相关函数, 三点相关函数是通过在相距为  $r_{12}$ 、 $r_{23}$ 、 $r_{31}$  的 3 个体积  $dV_1$ 、 $dV_2$ 、 $dV_3$  内各发现一个粒子的联合概率  $d^3P$  定义的:

$$d^3P = n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2)n(\mathbf{r}_3)[1 + \xi(r_{12}) + \xi(r_{23}) + \xi(r_{31}) + \zeta(r_{12}, r_{23}, r_{31})]dV_1dV_2dV_3, \quad (4)$$

$\zeta(r_{12}, r_{23}, r_{31})$  即是三点相关函数,  $r_{12}$ 、 $r_{23}$ 、 $r_{31}$  构成一封闭的三角形。

将方程 (4) 积分可以得到:

$$\zeta(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = \frac{DDD(r_{12}, r_{23}, r_{31})}{RRR(r_{12}, r_{23}, r_{31})} - 1 - \xi(r_{12}) - \xi(r_{23}) - \xi(r_{31}), \quad (5)$$

上式也可以表示为

$$\zeta(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = \frac{DDD(r_{12}, r_{23}, r_{31}) - DDR(r_{12}, r_{23}, r_{31})}{RRR(r_{12}, r_{23}, r_{31})} + 2, \quad (6)$$

其中  $DDD(r_{12}, r_{23}, r_{31})$  是观测样本中具有相同形状的三角形的总数目,  $RRR(r_{12}, r_{23}, r_{31})$  是随机产生样本中具有相同形状的三角形的总数目,  $DDR(r_{12}, r_{23}, r_{31})$  是观测样本中两个粒子和随机样本中一个粒子构成的具有相同形状的三角形个数。

早在 1975 年 Peebles 和 Groth<sup>[48]</sup> 利用 Lick 和 Zwicky 的星系角星表 (angular catalogs of galaxies) 就计算了星系的三点相关函数, 并且发现三点相关函数可以表示为等级形式<sup>[49]</sup>,

$$\zeta(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = Q[\xi(r_{12})\xi(r_{23}) + \xi(r_{23})\xi(r_{31}) + \xi(r_{31})\xi(r_{12})], \quad (7)$$

其中  $Q$  为常数, 即为约化三点相关函数。当时 Groth 和 Peebles<sup>[49]</sup> 通过计算星系的角三点相关函数, 利用 Limber 方程得到空间的约化三点相关函数  $Q = 1.29 \pm 0.21$  ( $r \leq 3$  Mpc/h)。近来的红移巡天测量结果表明相关函数基本上满足这种等级形式或至少可以近似为这种函数形式。随着观测样本的越来越多, 利用这些观测样本可以更细致地研究三点相关函数的性质。下面我们主要介绍几个具有代表性的结果。

利用 LCRS 星系红移巡天, Jing 和 Börner<sup>[6]</sup> 测出红移空间的星系约化三点相关函数  $Q_{\text{red}}(s, u, v)$  和其投影约化三点相关函数  $Q_{\text{proj}}(r_p, u, v)$  会随着三角形的尺度增加而减小, 并随  $v$  的增加而增加 (对于边长为  $s_{12}$ 、 $s_{23}$ 、 $s_{31}$  的三角形 ( $s_{12} \leq s_{23} \leq s_{31}$ ),  $s$ 、 $u$ 、 $v$  的定义为  $s = s_{12}$ 、 $u = s_{23}/s_{12}$ 、 $v = (s_{31} - s_{23})/s_{12}$ )。2004 年他们又利用 2dFGRS 的数据得到相似的结果<sup>[37]</sup>, 并进一步分析了约化三点相关函数对光度的依赖关系, 发现星系越亮其三点相关函数的幅度也越低, 但这种依赖关系并不是很强, 最亮星系样本测量的三点相关函数幅度会降低 50%。Wang 等人<sup>[26]</sup> 在 2004 年利用 2dFGRS 的数据, 结合暗晕模型也得到了类似的结果。另外由观测样本测量的  $Q_{\text{red}}(s, u, v)$  和  $Q_{\text{proj}}(r_p, u, v)$  比 WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) 的调和宇宙学模型预言的结果要低, 这说明目前的宇宙学模型并不完美, 星系偏袒因子仍需要进一步研究。Kayo 等人<sup>[20]</sup> 利用 SDSS 的数据研究了红移空间的三点相关函数, 分析了不同尺度和三角形形状的约化三点相关函数对星系形态、颜色、光度的关系, 发现红移空间的约化三点相关函数基本上不依赖于这些量。

### 3 数值模拟的测量结果及重谱模型的建立

#### 3.1 基本理论

用  $\rho(\mathbf{r})$  表示真实空间的密度场,  $\bar{\rho}$  表示它的平均密度, 则密度反差可以表示为  $\delta(\mathbf{r}) = (\rho(\mathbf{r}) - \bar{\rho})/\bar{\rho}$ , 其傅里叶变换为

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{V_\mu} \int_{V_\mu} \delta(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) d\mathbf{r}, \quad (8)$$

其中  $V_\mu$  是归一化体积。由于计算机本身的限制, 能模拟的宇宙体积是有限的 (边长为  $L$  的正方形), 其密度场以体积为周期进行周期性的变化, 而其波数必须满足周期性边界条

件的限制:

$$k_x = nk_b \left( k_b = \frac{2\pi}{L}, \quad n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \right). \quad (9)$$

$k_y$  和  $k_z$  都具有和  $k_x$  相似的表达式。功率谱  $P(k)$  和重谱  $B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$  可以定义为

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2) \rangle &= \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)P(k), \\ \langle \delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_3) \rangle &= \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)B_{123}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\delta_D$  是 delta 函数, 符号  $\langle \rangle$  表示对括号内的量进行系综平均。定义重谱的 3 个波矢量必须构成一个封闭的三角形, 重谱则是对具有相同形状的三角形的模进行系综平均。对于三角形的形状, 可以用很多方法来描述, 如由  $\mathbf{k}_1$ 、 $\mathbf{k}_2$ 、 $\mathbf{k}_3$  构成的三角形 ( $|\mathbf{k}_1| \geq |\mathbf{k}_2|$ ), 可以用  $k$ 、 $v$ 、 $\theta$  来描述这个三角形, 其中

$$k = |\mathbf{k}_1|, \quad v = \frac{|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}_1|}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2|}\right). \quad (11)$$

根据二阶扰动理论, 重谱可以表示为

$$B_{123} = 2 [F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)P_1P_2 + F_2(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)P_2P_3 + F_2(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1)P_3P_1], \quad (12)$$

其中  $P_i \equiv P(\mathbf{k}_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  是核函数 (kernel function), 其形式为

$$F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} \left( \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) + \frac{2}{7} \left( \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} \right)^2. \quad (13)$$

为方便描述, 定义约化重谱为

$$Q(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \frac{B_{123}}{P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1}. \quad (14)$$

根据方程 (11) 可以将约化重谱  $Q$  表示成  $k$ 、 $v$  和  $\theta$  的函数。

### 3.2 功率谱和重谱的测量

对于由离散分布的粒子组成的密度场, 其密度反差的傅里叶变换可表示成

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i}. \quad (15)$$

由于模拟宇宙周期边界条件的限制, 其波数必须满足方程 (9) 的限制。在对密度场进行傅里叶变换时, 由于模拟宇宙的粒子数 ( $N$ ) 和傅里叶变换的模数非常多, 用方程 (15) 直接计算傅里叶空间的密度反差并不是一个有效的方法。通常人们用快速傅里叶变换来计算傅里叶空间密度反差  $\delta(\mathbf{k})$ , 但是在进行快速傅里叶变换时, 密度场在网格上有限取样, 从而限制了波数的一个上限, 即尼奎斯特波数 (Nyquist wavenumber),

$$k_{\text{Ny}} = \frac{\pi}{\Delta x}, \quad (16)$$

其中  $\Delta x = L/N_m$  是格点跨距,  $N_m$  是格点维度。功率谱和重谱可以通过对波数在  $k_i$  的一个小薄壳层内 ( $k_i \pm \Delta k$ ,  $\Delta k \ll k_i$ ) 满足方程 (10) 的所有模取平均来得到:

$$\hat{P}(k_1) = \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \Phi} (\delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2))\delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2),$$

$$\hat{B}_{123} = \frac{1}{m'} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 \in \Psi} (\delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_3))\delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3), \quad (17)$$

其中  $\Phi$  是球壳  $k_1 \pm \Delta k$  ( $\Delta k \ll k_1$ ) 内所有波数  $\mathbf{k}_1$  (同时  $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$ ) 的集合,  $\Psi$  是在  $k_1 \pm \Delta k$ 、 $k_2 \pm \Delta k$  和  $k_3 \pm \Delta k$  ( $\Delta k \ll k_i, i = 1, 2, 3$ ) 的球壳内, 由  $\mathbf{k}_1$ 、 $\mathbf{k}_2$  和  $\mathbf{k}_3$  构成具有相同三角形形状模式的集合。  $m$  和  $m'$  代表满足条件的总模数。

### 3.3 数值效应对功率谱和重谱的影响

测量功率谱和重谱时, 必须要考虑由于模拟的数值效应对它们的影响, 如离散效应、模拟的盒子大小、力的软化, 这些都限制数值模拟的动力学范围, 从而影响测量的功率谱和重谱。在测量过程中, 人们通常使用快速傅里叶变换的方法得到傅里叶空间的密度反差, 这虽然是一个比较有效的方法, 但它会对测量的物理量产生混淆效应 (alias effect)。

通过简单的计算就可以校正作用在功率谱和重谱上的离散效应<sup>[22]</sup>。模拟的盒子大小和力的软化因子对测量结果的影响, 则需要利用不同精度的数值模拟来检验。Hou 等人<sup>[22]</sup>利用自相似演化宇宙的自相似演化性质严格考虑这些效应的影响, 并定量地给出这些效应的影响尺度。校正作用于重谱上的混淆效应则是一件比较复杂的事情, 正是这个效应的影响, 使得人们很难测量到非线性区域的重谱。

Hou 等人<sup>[22]</sup>发现在傅里叶空间中二维的统计性质和三维的统计性质是等价的。由于二维的快速傅里叶变换需要的计算机内存要远小于三维快速傅里叶变换, 从而可以将二维快速傅里叶变换的格点跨距取得足够小, 使得快速傅里叶变换的密度场和傅里叶变换的密度场尽可能接近。快速傅里叶变换的格点跨距越小, 混淆效应开始作用的尺度越小。二维的快速傅里叶变换就可以突破计算机的限制, 尽可能地避免混淆效应对测量结果的影响。结合二维和三维的快速傅里叶变换, Hou 等人<sup>[22]</sup>首次测量了非线性以及强线性区域的重谱。

### 3.4 二维和三维空间的功率谱和重谱

Hou 等人<sup>[22]</sup>发现, 在傅里叶空间中密度场的二维和三维空间的统计性质是等价的, 有:

$$\delta_{2D}(\mathbf{k}_{2D}) = \delta_{3D}(\mathbf{k}_{2D}, 0). \quad (18)$$

由方程 (10) 和 (18) 可以得到:

$$\langle \delta_{2D}(\mathbf{k}_1)\delta_{2D}(\mathbf{k}_2) \rangle = \langle \delta_{3D}(\mathbf{k}_1, 0)\delta_{3D}(\mathbf{k}_2, 0) \rangle,$$

$$\langle \delta_{2D}(\mathbf{k}_1)\delta_{2D}(\mathbf{k}_2)\delta_{2D}(\mathbf{k}_3) \rangle = \langle \delta_{3D}(\mathbf{k}_1, 0)\delta_{3D}(\mathbf{k}_2, 0)\delta_{3D}(\mathbf{k}_3, 0) \rangle. \quad (19)$$

同时运用宇宙学原理 (宇宙的均匀和各向同性的性质), 方程 (19) 说明, 在二维傅里叶空间的统计性质和三维傅里叶空间的统计性质是等价的。图 2 给出了由数值模拟得到的二维重谱和

三维重谱的比较, 图中的每一幅小图描述的是在给定  $k$  和  $v$  的情况下,  $Q$  随  $\theta$  的变化情况, 可以看出二维重谱和三维重谱是完全等价的。

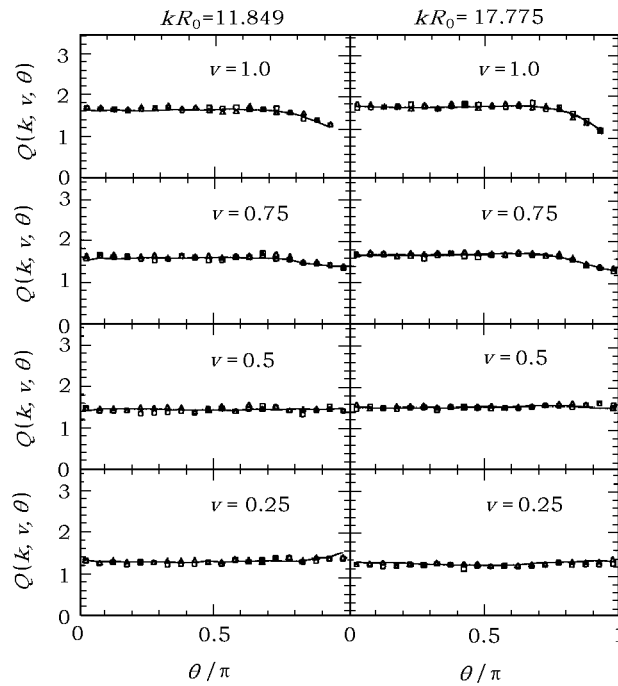


图 2 数值模拟测量的二维和三维约化重谱的比较<sup>[22]</sup>

数值模拟为初始谱指数为  $-1$  的尺度无关的宇宙学模型, 实线是利用数值模拟最后一步输出测量到的三维重谱, 空心三角形和正方形分别为在特征尺度定标下数值模拟最后两步输出得到的二维重谱。

### 3.5 自相似演化宇宙的重谱

研究非线性演化的一个非常好的方法就是模拟没有特征物理尺度的、自相似演化的宇宙。为得到自相似演化的宇宙, 有两个条件必须满足<sup>[1,50]</sup>: (1) 背景宇宙不应有任何的特征尺度, 即必须是 Einstein-de Sitter 宇宙; (2) 初始的密度场不应有任何的特征尺度, 以使它的初始功率谱必须具有幂率的形式。

在自相似成团模型中, 只存在一个特征尺度  $R_0$ 。选择特征尺度的一个比较简单的办法就是确定当扰动变成非线性时所对应的尺度, 也就是说, 在这个尺度上对线性密度场进行平滑时, 线性密度场的方差为 1, 即  $\sigma^2(R_0) = 1$ , 方差的定义如下:

$$\sigma^2(R, a) = \int \Delta_L^2(k, a) |W(kR)|^2 \frac{dk}{k}, \quad (20)$$

其中  $a$  是尺度因子。对于尺度无关的初始谱  $P_L \propto a^2 k^n$ , 特征尺度满足:

$$R_0 \propto a(t)^{2/(3+n)}. \quad (21)$$

由于特征波数  $k_0$  正比于  $R_0^{-1}$ , 则  $k_0 \propto a(t)^{-2/(3+n)}$ 。利用这个特征尺度, 可以将密度场的所



有统计性质表示成不依赖于时间的相似解<sup>[1,50~52]</sup>:

$$f(R, t) = g(R/R_0) \text{ 或 } f(k, t) = g(kR_0).$$

利用自相似演化宇宙的这个特定性质, 可以限定测量到的物理量是否受到数值效应的影响. 若测量到的物理量不再遵循自相似演化的性质, 则说明这个测量量已经受到了数值效应的影响.

早在 1988 年 Efstathiou 等人<sup>[50]</sup> 就利用初始谱指数为 1、0、-1、-2 的数值模拟研究物质的三点相关函数. 他们发现约化三点相关函数会随着初始谱指数的减小而增加. 由于当时数值模拟的精度很低, 这个研究结果比较粗糙. 随着数值模拟的精度越来越高, 自相似演化宇宙重谱的研究也取得了一定的进展<sup>[10,53~55]</sup>, 但是由于传统的测量方法需要消耗大量的计算机资源, 这些工作都没有可靠地测量到非线性区域的重谱, 而是作了很强的假设, 认为非线性重谱不依赖于三角形的形状和尺度, 仅仅是初始谱指数的函数.

SF99<sup>[10]</sup> 在数值模拟和 one-loop 扰动理论的基础上, 提出了一个适用于初始谱指数取值范围为  $-2 \leq n \leq 0$  的约化重谱的经验公式, 他们采取方程 (12) 的形式, 用  $F_2^{\text{eff}}$  代替方程 (12) 中的核函数, 得

$$B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = 2[F_2^{\text{eff}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) P(k_1) P(k_2) + F_2^{\text{eff}}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) P(k_2) P(k_3) + F_2^{\text{eff}}(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1) P(k_3) P(k_1)], \quad (22)$$

其中  $F_2^{\text{eff}}$  是有效核函数, 其形式为

$$F_2^{\text{eff}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{5}{7} a(n, k_1) a(n, k_2) + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} \left( \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) b(n, k_1) b(n, k_2) + \frac{2}{7} \left( \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} \right)^2 c(n, k_1) c(n, k_2). \quad (23)$$

当  $a = b = c = 1$  时, 方程 (22) 就是二阶扰动理论的结果. 由二阶扰动理论和数值模拟结果, SF99 拟合出了  $a(n, k)$ 、 $b(n, k)$ 、 $c(n, k)$ :

$$a(n, k) = \frac{1 + [0.7 Q_3^{\text{sat}}(n)]^{1/2} (kR_0)^{n+6}}{1 + (kR_0)^{n+6}}, \quad (24)$$

$$b(n, k) = \frac{1 + 0.2 (n+3)(kR_0)^{n+3}}{1 + (kR_0)^{n+3.5}}, \quad (25)$$

$$c(n, k) = \frac{1 + 4.5/[1.5 + (n+3)^4] (kR_0)^{n+3}}{1 + (kR_0)^{n+3.5}}, \quad (26)$$

其中  $Q_3^{\text{sat}}(n) = (4 - 2^n)/(1 + 2^{n+1})$ , SF99 假设约化重谱在强非线性区域仅依赖于初始谱指数,  $R_0$  是方程 (20) 描述的特征尺度.

结合二维和三维快速傅里叶变换, Hou 等人<sup>[22]</sup> 在 2005 年利用高精度数值模拟首次测量到强非线性区域的重谱, 发现约化重谱即使在强非线性区域依然依赖于三角形的形状和

大小，并随着初始谱指数的减小而增加，从而否定了 SF99 关于非线性重谱的假设。Hou 等人<sup>[22]</sup>还发现在弱非线性区域，测量结果能比较好地符合 one-loop 扰动理论预言<sup>[9]</sup>，即对于初始谱指数为  $-2$  的约化重谱，测量结果要高于二阶扰动理论的预言，而对于初始谱指数  $n \geq -1$  的情形，测量结果要低于二阶扰动理论的预言。由数值模拟测量到的非线性约化重谱和二阶扰动理论预言的结果之间存在一个转换关系<sup>[22]</sup>：

$$Q_{nl}(kR_0, v, \theta) = f_{nl}^{1/(1+0.25n)}(kR_0, v, \theta, n) Q_l(kR_0, v, \theta), \quad (27)$$

其中  $Q_{nl}$  是数值模拟的测量结果， $Q_l$  是二阶扰动理论预言的重谱。在给定  $k$ 、 $v$  的情况下， $f_{nl}$  作为  $\theta$  的函数近似为一高斯函数，它对高斯函数的偏离主要依赖于三角形的形状、三角形的大小以及初始谱指数，

$$f_{nl}(kR_0, v, \theta, n) = \frac{a_1(kR_0, v, n) \exp\left(-\frac{(\theta/\pi - a_2(kR_0, v, n))^2}{a_3(kR_0, v, n)}\right) + a_4(kR_0, v, n)}{1 + a_5(kR_0, v, n)(\theta/\pi)^2 + a_6(kR_0, v, n)(\theta/\pi)^4}, \quad (28)$$

式中  $a_i(kR_0, v, n)$  的形式由参考文献<sup>[22]</sup>给出。

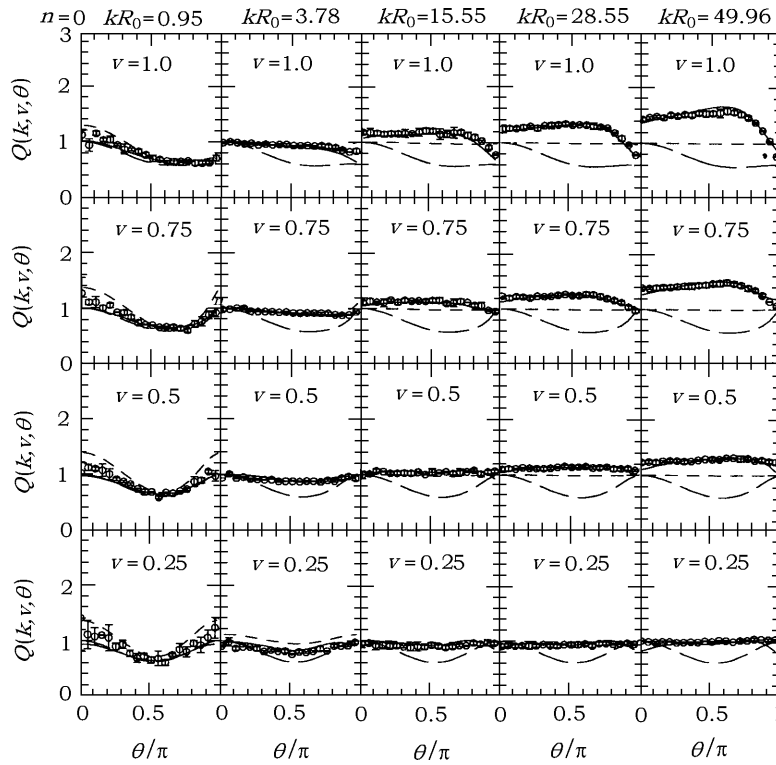


图 3 初始谱指数为 0 的不同尺度、不同三角形形状的约化重谱比较<sup>[22]</sup>

竖直排列的小图具有相同的  $kR_0$ ，空心圆点是数值模拟的结果，长虚线是二阶扰动理论预言的结果，短虚线是 SF99 预言的结果，实线为 Hou 等人提出的经验公式预言的结果。

图 3 将上述两个经验公式预言的重谱和数值模拟 (初始谱指数为 0 的自相似演化宇宙学模型) 的测量结果进行了比较。它给出不同尺度、不同三角形形状的约化重谱随三角形两边夹角的变化情况。可以看出在弱线性和准线性区域以及强非线性区域的某些特定的三角形 (如  $k_1 = 2k_2$ ), SF99 的经验公式预言的约化重谱能比较好地符合数值模拟测量结果, 但是由于 SF99 假设约化重谱在强非线性区域仅依赖于初始谱指数, 这个公式并不能准确地描述重谱在非线性区域的演化性质, 而 Hou 等人 [22] 的经验公式预言的重谱能很好地符合数值模拟的测量结果 (误差在 10% 范围内)。

### 3.6 暗物质主导宇宙的重谱

冷暗物质宇宙学模型是理解宇宙结构形成非常成功的框架, 其物质成团不再遵循自相似演化的性质, 自相似演化宇宙重谱的经验公式并不能直接用来预言暗物质主导宇宙的重谱的演化性质。幸运的是冷暗物质宇宙学模型的功率谱在非线性尺度上的谱指数在  $-1$  到  $-3$  的范围内, 考虑到冷暗物质功率谱的谱指数随尺度的变化, 以及相对 Einstein-de Sitter 宇宙学模型的偏离, 人们可以将自相似成团宇宙学模型的功率谱和重谱的非线性演化规律推广到冷暗物质宇宙学模型中。

Scoccimarro 和 Couchman [21] 于 2001 年在数值模拟的基础上, 将他们尺度无关约化重谱的经验公式 [10] 加以推广, 得出一个适用于冷暗物质主导宇宙学模型的约化重谱的经验公式。此公式仍采用方程 (22) 和 (23) 的形式, 只是  $a(n, k)$ 、 $b(n, k)$ 、 $c(n, k)$  变为:

$$a(n, k) = \frac{1 + \sigma_8^{-0.2}(z)[0.7Q_3(n)]^{0.5}(q/4)^{(n+3.5)}}{1 + (q/4)^{n+3.5}}, \quad (29)$$

$$b(n, k) = \frac{1 + 0.4(n+3)q^{n+3}}{1 + q^{n+3.5}}, \quad (30)$$

$$c(n, k) = \frac{1 + 4.5/[1.5 + (n+3)^4](2q)^{n+3}}{1 + (2q)^{n+3.5}}, \quad (31)$$

其中  $q = k/k_{nl}(z)$ ,  $Q_3 = (4-2^n)/(1+2^{n+1})$ ,  $k_{nl}$  由  $4\pi k_{nl}^3 P_L(k_{nl}) = 1$  决定。由于冷暗物质宇宙学模型的功率谱的谱指数是随波数变化的,  $n$  用有效谱指数代替, 定义为  $n = d \ln P / d \ln k$  ( $k = k_L/2$ )。

## 4 暗晕模型预言的相关函数

在冷暗物质宇宙学模型中, 结构增长的一个非常关键内容就是暗晕的形成。暗晕是通过非线性引力坍缩形成的一个暗物质粒子的准稳定系统。在这样的逐级成团图像中, 宇宙中绝大多数质量在任何时刻都存在于暗晕中。

暗晕模型可以提供一个非常简单的方法来解析地计算引力成团作用下物质的  $N$  点相关函数 [56]。利用这个方法, Seljak [57] 研究了物质和星系的功率谱; Peacock 和 Smith [58] 也做了类似的工作; Ma 和 Fry [23] 研究了两点和三点相关函数并计算了功率谱和重谱, 发现暗晕模型预言的结果和数值模拟的结果在一定程度上能吻合得很好; Scoccimarro 等人 [59] 讨论了

暗晕模型预言的功率谱、重谱以及高阶矩  $S_p$ ，发现在大于 1 Mpc/h 尺度上预言的结果能和数值模拟符合，但小尺度上偏差会大于 20%。

#### 4.1 暗晕模型

利用暗晕模型来描述物质的成团性质，首先要知道物质在暗晕内部是如何分布的、暗晕的数密度随质量分布的关系、暗晕间的相关函数。

##### 4.1.1 暗晕的密度分布

早期的数值模拟结果就发现，暗晕的密度分布满足一个普适的形状，即 NFW (Navarro、Frenk 和 White) [60~63] 分布，它遵循球对称形式：

$$\frac{\rho(r)}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{\delta_c}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}, \quad (32)$$

式中， $r_s$  是特征半径，如果暗晕的维里半径为  $r_{\text{vir}}$ ，可以定义聚集度 (concentration)： $c = r_{\text{vir}}/r_s$ ； $\delta_c$  是  $c$  的函数，因此暗晕的密度分布完全可以用  $c$  来描述。NFW 发现暗晕的内部密度分布斜率大概为  $-1$ ，关于这一点有很大的争论。Moore 等人 [64] 发现暗晕内部分布的斜率并不是  $-1$ ，而是  $-1.5$ 。Jing [65] 最初也得到了类似的结论。后来 Jing 和 Suto [66] 又发现其实对于不同质量的暗晕，其内部形状并不普适。他们发现，对于星系、星系群、星系团质量大小的暗晕，其内部密度分布斜率分别大致为  $-1.5$ 、 $-1.3$ 、 $-1.1$ 。

##### 4.1.2 质量函数

Press 和 Schechter [67] 发展了一个简单的理论来估计暗晕的数密度与质量分布的关系。这个理论依赖于几个其它相关的假设，即扰动线性增长、球坍缩模型、高斯场的性质。

在  $M$  到  $M + dM$  之间的暗晕数目可以表示为：

$$\frac{dn}{dM}(M, z)dM = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\delta_{\text{crit}}}{D(z)\sigma^2(M)} \frac{d\sigma}{dM} \exp\left[-\frac{\delta_{\text{crit}}^2}{2D(z)^2\sigma^2(M)}\right] dM, \quad (33)$$

其中  $D(z)$  是线性增长因子， $\sigma(R)$  是对红移为 0 的线性密度场用半径  $R$  的窗函数平滑后的扰动方差， $\delta_{\text{crit}}$  为临界密度。

Jenkins 等人 [68] 发现，与数值模拟的结果相比，对于质量小于  $m_*$  的暗晕，Press-Schechter 理论高估了其数密度约 1 倍，而低估了大质量 ( $M > m_*$ ) 暗晕的数目。这个结果与早期的发现一致 [70,71]。一个改进了的暗晕质量函数由 Sheth 和 Tormen [72] 给出 (下文中简称为 ST99)。根据其描述，暗晕的数密度可以表示为

$$n(m)dm = \frac{\bar{\rho}_0}{m} f(\sigma) d \ln(\sigma^{-1}), \quad (34)$$

$$f(\sigma) = A \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma^2}{a\delta_{\text{crit}}^2} \right)^p \right] \frac{\delta_{\text{crit}}}{\sigma} \exp\left(-\frac{2\delta_{\text{crit}}^2}{2\sigma^2}\right), \quad (35)$$

其中  $A = 0.3222$ 、 $a = 0.707$ 、 $p = 0.3$ 。

不过 Jenkins 等人 [68] 认为 ST99 给出的暗晕质量函数也不能很好地描述他们在  $z = 0$  处的数值模拟结果，并且发现用某种办法归一化以后，暗晕的质量函数与宇宙学模型、红移、功率谱都不相关，具有一个普适的形式。

### 4.1.3 暗晕的相关函数

暗晕是密度场里扰动较高的区域, 在高斯场中它们处于不同高度的峰上, 由高斯场的性质知道, 相对高的峰其相关性也越强。Mo 和 White<sup>[69]</sup> 根据高斯场的统计性质、球坍缩模型和扩展的 Press-Schechter 理论, 导出了暗晕的相关函数跟物质的相关函数之间存在的偏袒因子, 即  $b(R, M, z)$ , 将暗晕的相关函数写为  $\xi_{\text{hh}}(x) = b^2(x, M, z)\xi(x)$ , 这里  $\xi(x)$  为物质相关函数。在红移  $z$  处的偏袒因子可以表示为如下形式:

$$b = 1 + \frac{v^2 - 1}{\delta_{\text{crit}}(z)}, \quad (36)$$

式中  $v = \delta_{\text{crit}}(z)/\sigma(R)$ ,  $M = 4\pi/3R^3\rho_{\text{b}}(0)$ , 且  $\delta_{\text{crit}}(z) = (1+z)1.686$ 。

ST99 在这个公式的基础上加以改进, 得到一个新的拟合公式:

$$b(\nu) = 1 + \frac{a\nu - 1}{\delta_{\text{crit}}} + \frac{2p}{\delta_{\text{crit}}(1 + (a\nu)^p)}, \quad \nu = \left[ \frac{\delta_{\text{crit}}(z)}{D(z)\sigma(m)} \right]^2. \quad (37)$$

在描述暗晕间的三点相关时, 需要考虑偏袒因子的二阶项,

$$b_2(\nu) = \frac{8}{21} \frac{\nu^2 - 1}{\delta_{\text{crit}}} + \left( \frac{\nu}{\delta_{\text{crit}}} \right) (\nu^2 - 3). \quad (38)$$

值得注意的是, 二阶项只会影响到大尺度上的三点相关函数, 并且对三点相关函数的贡献非常小, 在计算中通常还是将这一项忽略掉。

### 4.2 暗晕模型预言的两点和三点相关函数

通过前面介绍的暗晕模型可以很简单地来预言物质的相关函数。暗晕的边界有不同的定义方法<sup>[25]</sup>, 一般认为暗晕的质量全部包含在维里半径内, 暗晕的质量可以表示为

$$m \equiv \int_{V_{\text{vir}}} d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}; m), \quad (39)$$

其中  $V_{\text{vir}}$  是暗晕的维里化体积。为计算方便, 通常定义约化暗晕密度:  $u_m(\mathbf{x}; m) = \rho(\mathbf{x}; m)/m$ , 它满足

$$\int_{V_{\text{vir}}} d\mathbf{x} u_m(\mathbf{x}; m) = 1. \quad (40)$$

根据暗晕模型, 空间  $\mathbf{x}$  的密度就是不同暗晕的密度在该点的叠加,  $\rho(\mathbf{x}) = \sum_i m_i u_{m_i}(\mathbf{x}; m_i)$ , 将  $\rho(\mathbf{x})$  进行系综平均即可得到空间的平均密度<sup>[73]</sup>,

$$\bar{\rho}_0 = \langle \rho(\mathbf{x}) \rangle = \left\langle \sum_i m_i u(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}; m_i) \right\rangle = \int dm n(m) \int d\mathbf{x}' u_m(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (41)$$

空间两点相关函数可以表示为  $\xi(r) = \xi_{1\text{h}}(r) + \xi_{2\text{h}}(r)$ , 其中  $\xi_{1\text{h}}(r)$ 、 $\xi_{2\text{h}}(r)$  分别是单个暗晕和两个暗晕对两点相关函数的贡献:

$$\xi_{1\text{h}}(r) = \int dm n(m) \left( \frac{m}{\bar{\rho}_0} \right)^2 \int_{V_{\text{vir}}} d\mathbf{x} u_m(\mathbf{x}) u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}),$$

$$\begin{aligned} \xi_{2h}(r) = & \int dm_1 n(m_1) \frac{m_1}{\rho_0} \int dm_2 n(m_2) \frac{m_2}{\rho_0} \int_{V_{\text{vir}}} d\mathbf{x}_1 u_{m_1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \\ & \int_{V_{\text{vir}}} d\mathbf{x}_2 u_{m_2}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2) \xi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2; m_1, m_2), \end{aligned} \quad (42)$$

式中  $\xi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2; m_1, m_2)$  是质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$  的暗晕的相关函数， $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ 。这里采用的是球对称模型，由于球对称性，得到的两点相关函数仅仅是  $r$  的函数，和  $r$  的空间方向无关<sup>[57]</sup>。若暗晕的密度是非球对称的，在计算相关函数时就要考虑可能的暗晕形状的积分，以及暗晕在空间的取向。

暗晕预言的三点相关函数可以表示为  $\zeta = \zeta_{1h} + \zeta_{2h} + \zeta_{3h}$ 。单个暗晕对三点相关函数的贡献为

$$\zeta_{1h}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \int dm n(m) \left(\frac{m}{\rho_0}\right)^3 \int_{V_{\text{vir}}} d^3\mathbf{x} u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}_1) u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}_2) u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}_3). \quad (43)$$

两个暗晕对三点相关函数的贡献为

$$\begin{aligned} \zeta_{2h}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = & \int dm n(m) \left(\frac{m}{\rho_0}\right)^2 \int dm' n(m') \frac{m'}{\rho_0} \int_{V_{\text{vir}}} d^3\mathbf{x} u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}_1) u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}_2) \\ & \int_{V'_{\text{vir}}} d^3\mathbf{x}' u_{m'}(\mathbf{x}' + \mathbf{r}_3) \xi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|; m, m') + \text{perm}(1, 2, 3). \end{aligned} \quad (44)$$

3 个暗晕对三点相关函数的贡献为

$$\begin{aligned} \zeta_{3h}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = & \int dm n(m) \frac{m}{\rho_0} \int dm' n(m') \frac{m'}{\rho_0} \int dm'' n(m'') \frac{m''}{\rho_0} \\ & \int_{V_{\text{vir}}} \int_{V'_{\text{vir}}} \int_{V''_{\text{vir}}} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' d^3\mathbf{x}'' u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}_1) u_{m'}(\mathbf{x}' + \mathbf{r}_2) u_{m''}(\mathbf{x}'' + \mathbf{r}_3) \\ & \zeta_{\text{halo}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}_1, \mathbf{x}' + \mathbf{r}_2, \mathbf{x}'' + \mathbf{r}_3), \end{aligned} \quad (45)$$

其中  $\xi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|; m, m')$ 、 $\zeta_{\text{halo}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}_1, \mathbf{x}' + \mathbf{r}_2, \mathbf{x}'' + \mathbf{r}_3)$  描述的是暗晕的两点和三点相关函数，扰动理论预言的结果基本上是可信的。

由于目前的暗晕模型还存在很多的不确定性，Takada 和 Jain<sup>[25]</sup> 在 2003 年定性地考虑了这些不确定性因素对两点和三点相关函数的影响，认为暗晕密度分布的内部斜率为  $-1$ 、聚集度  $c = 10(m/m_*)^{0.2}$  是一个比较可以置信的模型。图 4 比较了这个暗晕模型预言的三点相关函数和数值模拟测量的结果。图中的点是 Jing 和 Börner<sup>[74]</sup> 在 1998 年测量的数值模拟的三点相关函数，他们将边长为  $r_{12}$ 、 $r_{23}$ 、 $r_{31}$  的三角形 ( $r_{12} \leq r_{23} \leq r_{31}$ ) 用  $r_{12}$ 、 $u$ 、 $v$  来描述：

$$u \equiv \frac{r_{23}}{r_{12}}, \quad v \equiv \frac{r_{31} - r_{23}}{r_{12}}. \quad (46)$$

可以看出非线性尺度上 ( $r_{12} = 0.2$ 、 $0.32$  Mpc/h) 以及尺度较大 ( $r_{12} = 3.25$  Mpc/h) 时, 暗晕模型预言的结果和数值模拟的结果能很好地符合。但尺度在  $1$  Mpc/h 附近, 即非线性到线性的过渡阶段, 暗晕模型高估了约化三点相关函数, 这主要是暗晕边界截断引起的。

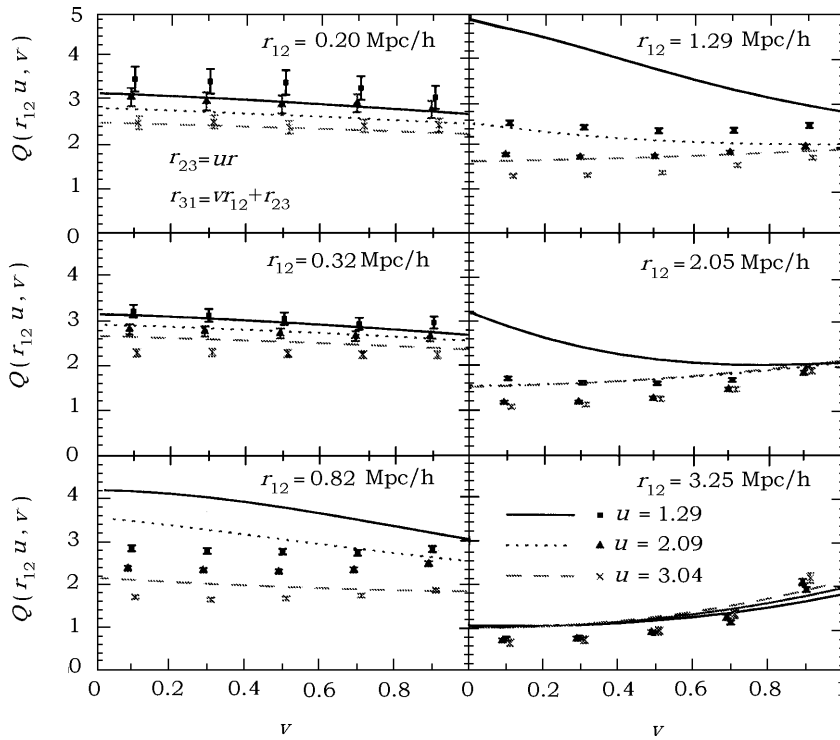


图 4 暗晕模型预言的三点相关函数和数值模拟结果的比较<sup>[25]</sup>

三角形用  $r_{12}$ 、 $u$ 、 $v$  描述; 带误差棒点是 Jing 和 Börner 数值模拟的结果<sup>[74]</sup>; 线是暗晕模型预言的结果。

虽然 Takada 和 Jain<sup>[25]</sup> 认为置信模型预言的两点、三点相关函数与数值模拟的结果符合得较好, 但在计算两点和三点相关函数时仍采用了一定程度的近似。另外描述暗晕密度分布的内部斜率和聚集度参数还没有最后的定论, 这需要更高的数值模拟结果来检验。如 Zhao 等人<sup>[75]</sup> 发现  $c_0 = 10$ 、 $\beta = 0.2$  时并不能准确地预言暗晕的聚集度, 特别是高红移的聚集度。

利用暗晕模型预言物质的两点相关函数需要八维积分, 而预言三点相关函数则需要十二维积分, 计算量很大, 但在傅里叶空间中, 密度场的卷积将变成乘积, 这将使计算过程变得简单。

功率谱可以表示为  $P(k) = P^{1h}(k) + P^{2h}(k)$ , 其中

$$P^{1h}(k) = \int dm n(m) \left(\frac{m}{\rho_0}\right)^2 |u(k|m)|^2, \quad (47)$$

$$P^{2h}(k) = \int dm_1 n(m_1) \left(\frac{m_1}{\rho_0}\right) u(k|m_1) \int dm_2 n(m_2) \left(\frac{m_2}{\rho_0}\right) u(k|m_2) P_{hh}(k|m_1, m_2).$$

这里  $P_{hh}(k|m_1, m_2)$  是质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  暗晕的功率谱。

傅里叶空间的三点相关函数  $B_{123} = B_{1h} + B_{2h} + B_{3h}$ ，其中

$$\begin{aligned}
 B_{1h} &= \int dm n(m) \left(\frac{m}{\bar{\rho}}\right)^3 \prod_{i=1}^3 u(\mathbf{k}_i|m), \\
 B_{2h} &= \int dm_1 n(m_1) \left(\frac{m_1}{\bar{\rho}}\right) u(k_1|m_1) \int dm_2 n(m_2) \left(\frac{m_2}{\bar{\rho}}\right)^2 u(k_2|m_2)u(k_3|m_2) \\
 &\quad P_{hh}(k_1|m_1, m_2) + \text{perm}(1, 2, 3), \\
 B_{3h} &= \left[ \prod_{i=1}^3 \int dm_i u(k_i|m_i) n(m_i) \left(\frac{m_i}{\bar{\rho}}\right) \right] B_{hhh}^{123}(m_1, m_2, m_3),
 \end{aligned} \tag{48}$$

这里  $B_{hhh}^{123}(m_1, m_2, m_3) \equiv B_{hhh}(k_1, k_2, k_3|m_1, m_2, m_3)$  是暗晕间的重谱，

$$B_{hhh}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; m_1, m_2, m_3) = \prod_{i=1}^3 b_i(m_i) \left[ B_{123}^{\text{PT}2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) + \frac{b_2(m_3)}{b_1(m_3)} P^{\text{lin}}(k_1) P^{\text{lin}}(k_2) \right], \tag{49}$$

$b_1(m)$  就是前面描述的偏袒因子，而  $b_2(m)$  为偏袒因子的二阶项。

由于目前的暗晕模型并不完善，利用暗晕模型研究物质的成团性质就要仔细考虑描述暗晕模型的不确定性因素，如暗晕内部密度分布斜率、聚集度、暗晕边界的截断、暗晕内次结构的影响。

## 5 结 语

三点相关函数或傅里叶空间的重谱是研究由引力不稳定性演化产生的大尺度结构非高斯性质的最低阶统计量。星系的重谱包含密度场的初始扰动和星系偏袒的信息，可以用来消除红移巡天动力学分析中性线偏袒和物质密度参数  $\Omega_m$  之间的简并。弱引力透镜可以直接探索暗物质的分布，并可以用来限定宇宙学分布，研究星系椭率的内禀分布等，这是目前宇宙学研究中一个非常重要的课题。其中剪切因子、会聚因子的三点相关函数、孔径质量的三阶矩以及欹斜度的非线性演化都直接依赖于物质的三点相关函数或重谱。三点相关函数或重谱的研究可以使得人们更好地了解物质的非线性演化性质。

### 参考文献:

- [1] Peebles J A E. The Large-scale Structure of the Universe, Princeton NJ: Princeton Univ. Press, 1980
- [2] Fry J N. ApJ, 1984, 279: 499
- [3] Bernardeau F. A&A, 1994, 291: 697
- [4] Barden M, Lehnert M D, Tacconi L *et al.* 2003, preprint(astro-ph/0302392)
- [5] Jing Y P, Börner G, Valdarnini R. MNRAS, 1995, 277: 630
- [6] Jing Y P, Börner G. A&A, 1997, 318: 667
- [7] Frieman J A, Gaztañaga E. ApJ, 1999, 521: L83
- [8] Fry J N. ApJ, 1984, 279: 499



- 
- [9] Scoccimarro R, Colombi S, Fry J N *et al.* ApJ, 1998, 496: 586
- [10] Scoccimarro R, Frieman J A. ApJ, 1999, 520: 35
- [11] Fry J N. Phys. Rev. Lett., 1994, 73: 215
- [12] Fry J N, Gaztañaga E. ApJ, 1993, 413: 447
- [13] Mo H J, Jing Y P, White S D M. MNRAS, 1997, 284: 189
- [14] Hivon E, Bouchet F R, Colombi S *et al.* A&A, 1995, 298: 643
- [15] Matarrese S, Verde L, Heavens A F. MNRAS, 1997, 290: 651
- [16] Verde L, Heavens A F, Percival W J *et al.* MNRAS, 2002, 335: 432
- [17] Verde L, Heavens A F, Matarrese S *et al.* MNRAS, 1998, 300: 747
- [18] Gaztañaga E, Frieman J A. ApJ, 1994, 437: L13
- [19] Scoccimarro R, Feldman H A, Fry J N *et al.* ApJ, 2001, 546: 652
- [20] Kayo I, Suto Y, Nichol R C *et al.* PASJ, 2004, 56: 415
- [21] Scoccimarro R, Couchman H M P. MNRAS, 2001, 325: 1316
- [22] Hou Y H, Jing Y P, Zhao D H *et al.* ApJ, 2005, 619: 667
- [23] Ma C, Fry J N. ApJ, 2000, 538: L107
- [24] Scoccimarro R, Sheth R K, Hui L *et al.* ApJ, 2001, 546: 20
- [25] Takada M, Jain B. MNRAS, 2003, 340: 580
- [26] Wang Y, Yang X, Mo H J *et al.* MNRAS, 2004, 353: 287
- [27] Jing Y P, Börner G. ApJ, 1998, 503: 37
- [28] van Waerbeke L, Hamana T, Scoccimarro R *et al.* MNRAS, 2001, 322: 918
- [29] Hamana T, Colombi S T, Thion A *et al.* MNRAS, 2002, 330: 365
- [30] Pen U, Zhang T, van Waerbeke L *et al.* ApJ, 2003, 592: 664
- [31] Zhang T, Pen U, Zhang P *et al.* ApJ, 2003, 598: 818
- [32] Takada M, Jain B. MNRAS, 2003, 344: 857
- [33] Schneider P, Kilbinger M, Lombardi M. 2003, preprint (astro-ph/0308328)
- [34] Jing Y P. Dissertation, Roman: IRAS, 1992: 11
- [35] Jing Y P, Mo H J, Börner G. ApJ, 1998, 494: 1
- [36] Jing Y P, Börner G, Suto Y. ApJ, 2002, 564: 15
- [37] Jing Y P, Börner G. ApJ, 2004, 607: 140
- [38] Marzke R O, Geller M J, da Costa L N *et al.* AJ, 1995, 110: 477
- [39] Norberg P, Baugh C M, Hawkins E *et al.* MNRAS, 2001, 328: 64
- [40] Tucker D L, Oemler A J, Kirshner R P *et al.* MNRAS, 1997, 285: L5
- [41] Zehavi I, Blanton M R, Frieman J A *et al.* ApJ, 2002, 571: 172
- [42] Börner G, Deng Z G, Xia X Y *et al.* Ap&SS, 1991, 180: 47
- [43] Xia X Y, Deng Z G, Zhou Y Y. IAU Symp. 124, 1987 : 36
- [44] Loveday J, Maddox S J, Efstathiou G *et al.* ApJ, 1995, 442: 457
- [45] Norberg P, Baugh C M, Hawkins E *et al.* MNRAS, 2002, 332: 827
- [46] Tegmark M, Blanton M R, Strauss M A *et al.* ApJ, 2004, 606: 702
- [47] Bernardeau F, Colombi S, Gaztañaga E *et al.* Phys. Rep., 2002, 367: 1
- [48] Peebles P J E, Groth E J. ApJ, 1975, 196: 1
- [49] Groth E J, Peebles P J E. ApJ, 1977, 185: 757
- [50] Efstathiou G, Frenk C S, White S D M *et al.* MNRAS, 1988, 235: 715
- [51] Colombi S, Bouchet F R, Hernquist L. ApJ, 1996, 465: 14
- [52] Jain B, Bertschinger E. ApJ, 1998, 509: 517
- [53] Fry J N, Melott A L, Shandarin S F. MNRAS, 1995, 274: 745
- [54] Scoccimarro R, Colombi S, Fry J N *et al.* ApJ, 1998, 496: 586
- [55] Scoccimarro, R. ApJ, 2000, 544: 597

- [56] Cooray A, Sheth R. *Phys. Rep.*, 2002, 372: 1
- [57] Seljak U. *MNRAS*, 2002, 318: 203
- [58] Peacock J A, Smith R E. *MNRAS*, 2000, 318: 1144
- [59] Scoccimarro R, Sheth R K, Hui L *et al.* *ApJ*, 2001, 546: 20
- [60] Navarro J F, Frenk C S, White S D M. *MNRAS*, 1995, 275: 720
- [61] Navarro J F, Frenk C S, White S D M. *MNRAS*, 1995, 275: 56
- [62] Navarro J F, Frenk C S, White S D M. *ApJ*, 1996, 462: 563
- [63] Navarro J F, Frenk C S, White S D M. *ApJ*, 1997, 490: 493
- [64] Moore B, Ghigna S, Governato F *et al.* *ApJ*, 1999, 524: 19
- [65] Jing Y P. *ApJ*, 2000, 535: 30
- [66] Jing Y P, Suto Y. *ApJ*, 2002, 574: 538
- [67] Press W, Schechter P. *ApJ*, 1974, 187: 425
- [68] Jenkins A, Frenk C S, White S D M *et al.* *MNRAS*, 2001, 321: 372
- [69] Mo H J, White S D M. *MNRAS*, 1996, 282: 347
- [70] White S D M, Efstathiou G, Frenk C S. *MNRAS*, 1993, 262: 1023
- [71] Gross M A K, Somerville R S, Primack J R *et al.* *MNRAS*, 1998, 301: 81
- [72] Sheth R K, Tormen G. *MNRAS*, 1999, 308: 119
- [73] Scherrer R J, Bertschinger E. *ApJ*, 1991, 381: 349
- [74] Jing Y P, Börner G. *ApJ*, 1998, 503: 37
- [75] Zhao D H, Jing Y P, Mo H J *et al.* *ApJ*, 2003, 597: L9

## The Progress of the Three-point Correlation Function

HOU Yong-hui<sup>1,3</sup>, ZOU Hua<sup>2</sup>

(1. *Centre for Astrophysics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*; 2. *College of Science Hohai University, Nanjing 210098, China*; 3. *Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China*)

**Abstract:** Three-point correlation function (3PCF) and its Fourier counter part, bispectrum, are the lowest statistics that quantify the non-Gaussian behavior of the large scale structure induced by the gravitational instability. In the present paper, the basic theory of the three-point correlation function and its Fourier counter part, bispectrum, are introduced firstly, then the results of 3PCF and bispectrum measured from the galaxies survey and simulations and predicted by the halo model are summarized.

**Key words:** astrophysics; three-point correlation function; review; large-scale structure; statistic