高阶引力理论及其在星系旋转曲线中应用的可能性

须 重 明 许 根 稳
(南京师范大学物理系 南京 210097)

摘 要

介绍了建立高阶引力理论 (该理论用以修正爱因斯坦广义相对论) 的物理背景，并讨论了暗物质问题。对几种主要高阶引力理论及其解作了评述，并尝试在不必假定暗物质存在的情况下，用高阶引力理论解决有关星系旋转曲线的困难。但令人遗憾的是，至今还没有一个理论取得完全的成功. 指出了解决这一问题面临的困难，并建议寻找新的高阶引力理论.

关 键 词 高阶引力理论 — 暗物质 — 星系旋转曲线

分 类 号 P131

1 引 言

本文主要介绍高阶引力理论及其在暗物质问题中的应用 [1] 。首先回顾一下爱因斯坦广义相对论及其主要优点，并指出从变分原理出发且满足一定条件的高阶引力理论将保留这些优点的主要方面。

爱因斯坦的广义相对论 [2] 的场方程如下:

$$G_{\mathrm{E}}^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-kT^{\mu\nu} \tag{1}$$

其中 $k=8\pi G$, $R_{\mu\nu}=R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}$ 是 Ricci 张量, $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ 是曲率标量。 Riemann 曲率张量定义为 $R^{\tau}_{\mu\sigma\nu}=\partial_{\nu}\Gamma^{\tau}_{\mu\sigma}-\partial_{\sigma}\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}+\Gamma^{\tau}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}-\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ ，其中 Christoffel 符号 $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu}+g_{\nu\sigma,\mu}-g_{\mu\nu,\sigma})$, $g_{\mu\nu}$ 是度规 $(\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu})$ ，下标 E 表示爱因斯坦理论。

众所周知，广义相对论的主要优点是:

(a) 这是一个广义协变的理论，它在任何坐标系中都成立。

(b) 广义相对论自动满足局域能量 — 动量守恒定律. 这是因为方程 (1) 的左边可从 Bianchi 恒等式推得 $G^{\mu\nu}_{\mathrm{E};\nu}=0$ ，右边也就自动满足 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$ ，即局域能量 — 动量守恒定律。

(c) 场方程与运动方程有着内在联系，也就是说，运动方程可以从场方程得到。

1999-08-26 收到

(d) $G_{\rm E}^{\mu\nu}$ 是一个包含二阶微分算符的张量，并且它的非相对论极限是牛顿引力理论，而牛顿引力理论在太阳系范围内与实验结果符合得很好。

然而，不仅仅是广义相对论 (GR) 具有 (a)~(c) 的优点，其他引力理论如果满足一定的条件，也具有这些优点。实际上，任何度规引力理论都具有优点 (a)~(c) 广义协变性 [3] 。至于优点 (b)，如果一个引力场方程是从变分原理导出，且它的 Lagrangian 是由 Riemann 曲率张量构成的任意函数，该场方程会自动满足局域能量 — 动量守恒 [4] ，换言之，如果作用量积分取如下形式

$$I_A = \int K_A |g|^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x^4 \tag{2}$$

(其中 K_A 可以是曲率张量的一个任意标题函数)，那么由对作用量 I_A 的变分得到的场方程 $G_A^{\mu\nu} = -kT^{\mu\nu}$ 满足 $G_{A;\mu}^{\mu\nu} = 0$ 。当 $K_A = R$(GR 理论) 时， $G_{A;\mu}^{\mu\nu} = 0$ 即为 Bianchi 恒等式。当取 $K_A = R^2$(Weyl 高阶引力理论 [5]) 、 $K_A = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 或 $K_A = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$(Eddington 高阶引力理论 [6]) 、 $K_A = R\Box R$[7] 、 $K_A = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}/R$ 以及 $K_A = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}/R$[8] 或者是以上各标量函数的组合形式 (例如 $K_A = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - R^2/3$(Bach 高阶引力理论 [9])) 时，我们都将得到相应的准 Bianchi 恒等式。任何具有优点 (c)(场方程与运动方程内在联系的完美体现) 的引力理论必需满足以下 3 个条件： (1) 这是一个仿射空间的理论； (2) 满足优点 (b)，即 $G_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$ ； (3) $G_A^{\mu\nu}$ 是一个对称张量 ($G_A^{\mu\nu} = G_A^{\nu\mu}$[10]) 。关于优点 (d)，经典的牛顿引力理论 (即平方反比定律,) 也许是存在疑义的，特别当距离的尺度可与旋涡星系的尺度相比较时，星系的旋转曲线可能暗示着牛顿引力理论需要修正，这种修正的必要性将在下节中详细讨论。总之，研究不同于经典引力理论的另外形式的引力理论是十分重要的。

2　高阶引力理论的物理背景 — 暗物质问题

众所周知， GR 是非常成功的，但从理论的观点看，它的某些方面仍然不能令人满意。首先，在引力场量子化中存在重整化的问题，而在高阶引力理论中，包含在 Lagrangian 中的正比于 R^2 或 $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ 的项使量子化引力场不发散、稳定并能够重整化 [11] 。其次，高阶引力理论能够消除引力场的奇性问题。最后，在高阶引力理论的纯引力暴胀宇宙模型中，不需要一个外加的 ϕ^4 场而用高阶项代替，这样得到一个纯引力暴胀宇宙模型 [7,12~15] ，以前宇宙的暴胀模型已取得很大的成功，但需要在广义相对论的暴胀模型中加上一个额外的 ϕ^4 场和它的相变过程才行，当然若能不引入 ϕ^4 场就更好。

从实验的观点看，现代引力实验的精度远比其他方面物理实验 (如与光学和射电的实验相比) 的精度低 [16] 。将质点 m_1 和 m_2 间的引力表达式写成如下形式：

$$F(r) = G_\infty \left[1 + \alpha(1 + r/\lambda)e^{-r/\lambda}\right] \frac{m_1 m_2}{r^3} \boldsymbol{r} \tag{3}$$

其中 r 是 m_1 和 m_2 的距离， α 和 λ 是有别于牛顿定律的两个参数。至今，实验只能把 α 和 λ 限于 $\alpha < 10^{-2}$ 和 $\lambda > 10^{14}$m 或 $\lambda < 10^{-3}$m 的范围内。这表明在符合现代实验结果的前提下，经典牛顿理论仍有很大可修正的余地。

如果经典的牛顿引力理论在星系尺度上有效，明显的迹象表明存在暗物质。首先，几乎所有旋涡星系的旋转曲线趋向于各自的常值 [17] 。在某些情况下，旋转曲线会线性上升或下

降，我们通常可以把这种情况归因于运动学效应 [18,19]。这个观测事实与发光物质遵循牛顿动力学规律的分布相矛盾，也就是说，星系外围的恒星的旋转速度比牛顿理论得到的结果大几倍。如果标准的引力理论是正确的话，则就须假设星系中存在暗物质并可借助于暗物质的分布来解释观测到的旋转曲线。其次，在引力透镜效应观测中发现，正如前面一样，作为透镜源的星系中总的发光物质的质量远小于从引力透镜效应观测中所得到星系应有的质量 [20]。第三， Ostriker 和 Peebles[21] 通过数值模拟证明了任何星系盘如果仅靠自身的自引力，最终只会变成一个旋转的棒。但如果有一个质量足够大的晕包围着盘的话，盘才能保持它固有的形状。这些迹象均显示了暗物质存在的可能性。

我们知道，宇宙中大约有三分之一的星系是旋涡星系，因此，如果牛顿引力理论正确的话，则星系盘外需要一个由暗物质组成的大质量晕才能维持一个动力学稳定的自转的星系盘。银河系中暗物质晕的尺度可能大到 150kpc[22]，其质量大约为 $1.4 \times 10^{12} M_{\odot}$，该质量约占银河系总质量的 90% 左右 [22~24]，因此，如果假定牛顿引力理论在星系的尺度上也是正确的话，那么星系中存在暗物质是无疑的。当前流行的观点认为宇宙的总质量中 90% 以上是暗物质 [25]。而且关于暗物质已知的主要性质是不可见和无耗损。但需要指出的是引力场也具有这些性质。目前已提出的暗物质候选者已达二十多种，如非零质量的中微子、光微子、轴子等 [22,26]，它们的质量覆盖了 69 个数量级。然而，直到现在我们仍不清楚暗物质究竟是什么；即使我们知道了什么是暗物质，我们还必须回答为什么暗物质以这种方式分布，恰好能使旋转曲线变平坦。

人们也许会怀疑，根本不存在暗物质，可能牛顿理论不能延伸到这样大的尺度下。因为牛顿引力理论毕竟是在 300yr 前在研究太阳系行星运动规律时发现的，这个尺度比起星系尺度要小得多 (其比值大约为 10^{-9})。如果在大尺度下修正牛顿引力理论 [27]，可能根本无需假定暗物质存在就能解决星系动力学问题。这种修正牛顿引力理论的方案已提出数十种 [28,29]，但其中一些只有唯象的理论，它们并未以度规引力理论为基础。值得注意的是，若修改牛顿引力理论，上面提及的星系盘稳定问题可以在没有大质量晕的情况下，同时被解决。 Tohline[30] 利用数值模拟证明了如果引力在大尺度时，不是按 r^{-2} 而是随 r^{-1} 规律下降 (这正是解释星系平坦旋转曲线所要求的)，那么星系盘将是稳定的。当然，也有一些基于度规引力理论的高阶引力理论。例如 Mannheim 和 Kazanas[31,32] 提出用共形高阶理论来解释星系旋转曲线。但他们的解在外解与物体的内解连接问题上存在严重的困难 [33]。也有人提出在 GR 中加上 Weyl 高阶项来解释星系平坦旋转曲线 [34]。但后来我们发现此解中在内解与外解连接条件上也存在一些困难，这点我们将在第 4 节中讨论。尽管到目前为止尚未有任何一个高阶引力理论能彻底成功解释星系旋转曲线，但在暗物质真正发现之前任何此类尝试都是有意义的。

3　某些高阶引力理论及其解

爱因斯坦广义相对论的 Lagrangian 形式最为简单，即为曲率标量 R 通过变分得到的场方程是一个关于 $g_{\mu\nu}$ 的二阶偏微分方程。对应于其他复杂的 Lagrangian 的场方程，若其为关于 $g_{\mu\nu}$ 的四阶 (或更高阶) 的偏微分方程，则这种由非爱因斯坦 Lagrangian 导出的引力理论称为高阶引力理论。

在 Einstein 提出广义相对论后不久即由 Weyl[5] 和 Eddington[6] 提出了最早的高阶引力

理论，其 Lagrangian 分别为 R^2 和 $\alpha R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+\beta R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ 。对应于 Lagrangian 为 R^2 、$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 和 $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ 的场方程 $G_1^{\mu\nu}$ 、 $G_2^{\mu\nu}$ 和 $G_3^{\mu\nu}$ 分别为：

$$G_1^{\mu\nu}=2g^{\mu\nu}R^{\sigma}_{;\sigma}-2R^{\mu\nu}_{;}-2RR^{\mu\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^2, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} G_2^{\mu\nu} \quad = \quad & g^{\mu\nu}R^{\sigma\tau}_{;\sigma\tau}+R^{\mu\nu\sigma}_{;\sigma}-R^{\mu\sigma\nu}_{;\sigma}-R^{\nu\sigma\mu}_{;\sigma}-2R^{\mu\sigma}R^{\nu}_{\sigma} \\ & +\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} G_3^{\mu\nu} \quad = \quad & 2R^{\mu\sigma\nu\tau}_{;\sigma\tau}+2R^{\mu\sigma\nu\tau}_{;\tau\sigma}-2R^{\mu}_{\sigma\tau\rho}R^{\nu\sigma\tau\rho} \\ & +\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{\sigma\tau\rho\lambda}R^{\sigma\tau\rho\lambda}. \end{aligned} \tag{6}$$

由于存在 Gauss-Bonnet 关系： $G_1^{\mu\nu}-4G_2^{\mu\nu}+G_3^{\mu\nu}=0$ ，通常只需要考虑其中 $G_1^{\mu\nu}$ 和 $G_2^{\mu\nu}$ 两个，再考虑物质部分的变分，则场方程的完整形式为：

$$\tau G_1^{\mu\nu}+\lambda G_2^{\mu\nu}=-kT^{\mu\nu}. \tag{7}$$

其中， τ 和 λ 是耦合常数。

最初， Pauli[35] 和 Buchdahl[36] 认为爱因斯坦场方程的所有真空解 (包括 Schwarzschild 解) 都是 Weyl 和 Eddington 场方程的解。因为他们认为，当把 $R_{\mu\nu}=0$ 代入方程 (4)~(6) ，方程 (7) 将自动为零。因此 Weyl 和 Eddington 认为高阶引力理论已经具有物理解。其实这是错误的，因为任何偏微分方程的解不仅应满足方程，还需满足边界条件。已有人指出 [37] ，爱因斯坦场方程的外解并不是 Weyl 和 Eddington 的高阶理论的物理解，因此不能与内解光滑连接，也就是说它并不满足边界条件。 Havas[4] 也已提出。如果要高阶引力理论也能成功地解释四个经典实验的结果。那么该理论只能是广义相对论的修正形式。因此，在一个高阶引力理论中，广义相对论的部分 R 须加到 Lagrangian 中，即

$$L=R+\tau R^2+\lambda R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}. \tag{8}$$

因此，高阶引力理论场方程为

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R+\tau G_1^{\mu\nu}+\lambda G_2^{\mu\nu}=-kT^{\mu\nu} \tag{9}$$

其中， $G_1^{\mu\nu}$ 和 $G_2^{\mu\nu}$ 分别由 (4) 、 (5) 式定义。相应于 (8) 式的 Lagrangian 的场方程的一级近似解已在许多文章中讨论过，如 Pechlaner 和 Sexl[37] 讨论了 $\tau=0$ 的近似解， Stelle[38] 和 Schmidt[39] 得到了点质量的解。线性化的高阶引力场方程 (9) 通过利用一个三阶规范条件也已得到了解 [40] ，文献 [40] 中对源的对称没有特殊要求，而三阶规范条件显得非常勉强，似乎它的目的仅是为了解复杂的方程，而没有明显的物理意义。为此，有人利用谐和坐标条件替代三阶规范条件 [41] ，然后解此线性化方程。我们知道，谐和坐标条件具有非常明显的物理意义。在线性近似中，令

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}, \tag{10}$$

其中 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ，而且 $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$ ．通过对方程 (9) 的线性化和代数变换，可得到：

$$(-\lambda\Box + 1)\left(\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{6}R\right) + (2\tau+\lambda)R_{,\mu\nu} = -8\pi k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T), \tag{11}$$

其中 □ 表示 D'Alembertian 算符 $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ ．方程 (11) 的通解如下：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \overset{(\mathrm{E})}{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\left(\frac{6\pi + 2\lambda}{3}\right)R + \psi_{\mu\nu} - (2\tau+\lambda)h_{,\mu\nu} \quad , \tag{12}$$

其中 $\overset{(\mathrm{E})}{h}_{\mu\nu}$(表示度规的爱因斯坦部分)、 $\psi_{\mu\nu}$ 、 h 和 R 各自满足下列方程：

$$\Box \overset{(\mathrm{E})}{h}_{\mu\nu} = -16\pi k(T'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\eta_{\mu\nu}), \tag{13}$$

$$\overset{(\mathrm{E})}{h}{}^{\mu}_{\nu,\mu} = \frac{1}{2}\overset{(\mathrm{E})}{h}{}^{\mu}_{\mu,\nu} \quad , \tag{14}$$

$$\left(-\Box + \frac{1}{\lambda}\right)\psi_{\mu\nu} = -16\pi k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T\eta_{\mu\nu}) - 2(2\tau+\lambda)R_{,\mu\nu} \quad , \tag{15}$$

$$\psi^{\alpha\mu}_{,\alpha} - \eta^{\alpha\mu}\psi_{,\alpha} = 0 \quad , \tag{16}$$

$$h = \overset{(\mathrm{E})}{h} - 2(6\tau + 2\lambda)R \quad , \tag{17}$$

$$-R - (6\tau + 2\lambda)\Box R = -8\pi kT \quad . \tag{18}$$

我们知道，方程 (14) 和 (16) 是谐和坐标条件，方程 (13) 是非常次的 D'Alembert 方程，方程 (15) 和 (18) 是 Klein-Gordon 方程．上述所有方程都是二阶线性偏微分方程，他们的解都早已得到 [42]，这些解在真空和非真空情况均适用．

最近，有人考虑另一种高阶引力理论 [8]，在这种新理论中

$$\mathcal{L} = R + \lambda R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}/R + \tau R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}/R \quad , \tag{19}$$

相应的场方程是

$$G^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}_E + \lambda G^{\mu\nu}_1 + \tau G^{\mu\nu}_2 = -8\pi G T^{\mu\nu} \quad , \tag{20}$$

其中

$$\begin{aligned}
G^{\mu\nu}_E &= R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad , \\
G^{\mu\nu}_1 &= g^{\mu\nu}(R^{\sigma\tau}/R)_{;\sigma\tau} + (R^{\mu\nu}/R)^{\tau}_{;\tau} - g^{\mu\nu}(R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}/R^2)^{\tau}_{;\tau} \\
&\quad - \left[(R^{\mu\sigma}/R)^{\nu}_{;\sigma} + (R^{\nu\sigma}/R)^{\mu}_{;\sigma}\right] + \left(R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}/R^2\right)^{\mu\nu}_{;} \\
&\quad + R^{\mu\nu}\left(R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}/R^2\right) - 2R^{\mu\sigma}R^{\nu}_{\sigma}/R + \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}/R \quad , \\
G^{\mu\nu}_2 &= 4\left(R^{\mu\sigma\nu\tau}/R\right)_{;\sigma\tau} - g^{\mu\nu}\left(R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}/R^2\right)^{\tau}_{;\tau} \\
&\quad + \left(R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}/R^2\right)^{\mu\nu}_{;} - \tfrac{2}{R}R^{\mu}_{\sigma\tau\rho}R^{\nu\sigma\tau\rho}/R \\
&\quad + R^{\mu\nu}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}/R^2 + \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}/R \quad .
\end{aligned}$$

在该理论中，耦合参数 λ 和 τ 都是无量纲的，从理论上看，无量纲的耦合参数具有某些优点。从方程 (20) 可以立即得到最大对称空间的 de-Sitte 解为

$$g^{\mu\nu} = 4(T^{\mu\nu}/T)\left(1 - \frac{\lambda}{4} - \frac{\tau}{6}\right)^{-2}. \tag{21}$$

4 高阶引力理论对星系平坦旋转曲线的解释及其困难

利用高阶引力理论无需传统的暗物质假定就可能解决星系平坦旋转曲线问题。

在讨论把高阶引力理论应用于解释平坦旋转曲线之前，首先考虑 Sanders[43] 修改的引力势形式

$$\phi = \frac{-GM}{r(1+\alpha)}\left[1 + \alpha e^{-r/r_0}\right], \tag{22}$$

其中 $\alpha = 0.9 \sim -0.98$， $r_0 \approx 30\text{kpc}$，此引力势可以解释大多数星系的平坦旋转曲线问题。方程 (22) 的势不同于通常的牛顿势之处在于前者包含一个额外的指数项，对于太阳系来说，此项非常接近于 1， (22) 式便变为标准形式 $\phi = -GM/r$ 。但当距离远大于 30kpc 时，指数项就变为零，这样我们又得到牛顿势 $\phi = -\frac{GM}{(1+\alpha)r}$ ，但现在引力常数 $G/(1+\alpha)$ 约是原来的几十倍。 Sanders 的势函数包含一个汤川形式部分，通常假定这是由于低质量的矢量玻色子引起的。但是 Sanders 的工作是唯象的，它既不是一个度规的引力理论，也不是一个协变的理论，因此它是不完全的，所以该理论不能真正否定暗物质存在的假设。

有人尝试用高阶引力理论的弱场, 低速近似来解释平坦旋转曲线问题 [34] 。考察方程 (9)，当 $\lambda = 0$ 时，场方程为

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \tau\left(2g^{\mu\nu}R^{\sigma}_{;\sigma} - 2R^{;\mu\nu}_{;} - 2RR^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^2\right) = -8\pi GT^{\mu\nu}. \tag{23}$$

由方程 (23) 取弱场、低速、线性近似及无限远处边界条件，可得到准牛顿势 ($g_{00} = 1 + 2\phi$)：

$$\phi = -\frac{MG_\infty}{r}\left(1 - \gamma e^{-r/\sqrt{6\tau}}\right), \tag{24}$$

其中 γ 是与质量无关的常数。如果取 $\sqrt{6\tau} = 30\text{kpc}$ ，则在太阳系内 $r/\sqrt{6\tau}$ 大约为 10^{-9} ，由此得到：

$$\phi = -\frac{MG_\infty}{r}(1-\gamma). \tag{25}$$

如取 $G_l = G_\infty(1-\gamma)$ ，其中 G_l 是一个重整化的引力常数，地面测量 (太阳系内) 只能确定 G_l 。因此有：

$$\phi = -\frac{G_l M}{r}, \tag{26}$$

这精确地与太阳系内的牛顿势一致。

如果讨论星系动力学问题，就必须用 (22) 式，那么旋转速度的表达式为：

$$\frac{V^2}{r} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{G_\infty M}{r^2}\left[1 - \gamma\left(1 + \frac{r}{r_0}\right)e^{-r/r_0}\right]. \tag{27}$$

方程 (22) 式与 Sanders 修正的引力理论 ($\gamma=-\alpha$) 等价，只是 (22) 式的势是从高阶引力理论得到的。如果 $0.98\geq\gamma\geq0.9$，在大范围中，旋转速度 V 与常数的差仅在 10% 的误差范围内。因此星系的旋转曲线在大的范围中是平坦的。

但是，常数 $G_\infty M$ 和 γ 不能直接通过拟合平坦旋转曲线得到，势函数 ϕ 必须与内解光滑连接。这些常数必须通过边界条件确定，而不是通过平坦旋转曲线来定，对于球对称情况的内解，我们可以直接从 (12) 式 [41] 求得一阶近似解。通过这种方法，发现 γ 的值并不在 $0.98\sim0.90$ 之间，它甚至还是个负值，他们检验了多个高阶引力理论模型，发现几乎所有模型都存在这个问题。有些模型甚至更糟 [31,32]。除了存在内外解匹配问题外，他们的能量 - 动量张量是无迹的，但对于静质量不为零的物质很难找到一条途径去构造无迹的能量 - 动量模型 [33]。

我们仍期待发现一个既能与内解的边界条件匹配又能解释星系的平坦旋转曲线的新的引理论，当然，在太阳系内，这个新的引力理论必须与广义相对论的四个经典实验一致，但这绝非易事。

5 结　论

在前述几节中，我们讨论了建立高阶引力理论的可能性，特别以暗物质问题和平坦旋转曲线问题作为建立高阶引力理论的物理背景。文中我们对 Weyl-Eddington 的基本高阶引力理论及其解作了评述，并介绍了一种新的高阶引力理论。另外，还讨论了高阶引力理论在解释平坦旋转曲线上的应用以及所面临的困难。为此，须探讨新的 Lagrangian 形式以形成新的高阶引力理论来解决这些困难。另外，高阶引力理论与宇宙学的关系在文献中也有所讨论 [44,45]，它对于宇宙常数给予了新的理解 [44]。

参　考　文　献

1 Xu C, Wu X. Hadronic J. 1998, 21: 224
2 Weinberg S. Gravitation and Cosmology. New York: J. Wiley and Sons, Inc., 1972
3 Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A. Gravitation, San Francisco: Freeman, 1973
4 Havas P. Gen. Relativ. Gravitation, 1977, 8: 631
5 Weyl H. Space-Time-Matter, New York: Dover, 1952
6 Eddington A. The Mathematical Theory of Relativity, 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1924
7 Berkin A L, Maeda K. Phys. Lett. B, 1990, 245: 348
8 Xu C, Ellis G F R. Found. Phys. Lett., 1992, 5: 365
9 Bach R. Math. Z, 1921, 9: 110
10 Havas P. J. Math. Phys., 1964, 5: 373
11 Stelle K S. Phys. Rev. D, 1997, 16: 953
12 Starobinsky A A. Phys. Lett. B, 1980, 91: 99
13 Mijić M B, Morris M S, Suen W M. Phys. Rev. D, 1986, 34: 2934
14 Berkin A L. Phys. Rev. D, 1990, 42: 1017
15 Brüning E, Coule D H, Xu C. Gen. Telativ. Gravitation, 1994, 26: 1197
16 Fischbach E, Talmadge C. Nature, 1992, 356: 207
17 Faber S M, Gallagher J S. Annu. Rev. Astron. Astrophys., 1979, 17: 23
18 Xu C, Wu X. Astrophys. Space Sci., 1988, 141: 389
19 Xu C, Lu T. Astrophys. Space Sci., 1988, 145: 47

20 Dar A. Nucl. Phys. B, (Proc. Suppl.) 1992, 28A: 321
21 Ostriker J R, Peebles P J E. Ap. J. 1973, 186: 467
22 Primac J, Blumenthal G R. In: Audouze J, Tran Tranh Van J eds. Formation and Evolution of Galaxies and Large Scale Structure in the Universe, Dordrecht: Riedel , 1984. 163
23 Caldwell J A R, Ostriker J P. Ap. J. 1981, 251: 61
24 Ostriker J P, Caldwell J A R. In: Shuter W L H ed. Kinematics, Dynamics and Structure of the Milky Way, Proc. of a workshop on "The Milky Way", Vancouver, Canada, 1982, Dordrecht: Reidel, 1983: 249
25 Ashman K M. Publ. Astron. Soc. Pac., 1992, 104: 1109
26 Sciama D W. Modern Cosmology and the Dark Matter Problem, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993
27 Hammond R. In: Pullin J ed. Dark Matter or New Gravity, Matters of Gravity Electronic Newsletter 3 1994. 25
28 Bekenstein J D. In: Dyer C, Tupper T eds. Proceeding of the 2nd Canadian Coference on General Relativity and Relativistic Astrophysics, Singapore: World Sci., 1988: 68
29 Sanders R H. Astron. Astrophys. Rev., 1990, 2: 1
30 Tohline J E. In: Athanassoula L ed. The Internal Kinematics and Dynamics of Galaxies, IAU Symp. 100, Dordrecht: Reidel, 1984: 205
31 Mannheim, P D, Kazanas D. Ap. J. 1989, 342: 635
32 Mannheim P D, Kazanas D. Gen. Relativ. Gravitation, 1994, 26: 337
33 Perlick V, Xu C. Ap. J., 1995, 449: 47
34 Xu C, Ellis G F R, Wu X *et al.* S. Afr. J. Phys., 1992, 15: 5
35 Pauli W. Theory of Relativity, London: Pergamon Press, 1958
36 Buchdahl H A. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1948, 8: 89
37 Pechlaner E, Sexl R. Commun. Math. Phys., 1996, 2: 165
38 Stelle K S. Gen. Relativ. Gravitation, 1978, 9: 353
39 Schmidt H J. Astron. Nachr., 1986, 307: 5
40 Teyssandier P. Classical Quantum Gravity, 1989, 6: 219
41 Xu C, Ellis G F R. Classical Quantum Gravity, 1991, 8: 1747
42 Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, (Wiley-Interscience), 1953
43 Sanders R H. Astron. Astrophys. 1984, 136: L21
44 Capozziello S, Ritis R D, Marino A A. gr-qc/9806043
45 Cotsakis S. gr-qc/9712046

The Higher–order Gravitational Theory and Its Application in the Rotation Curve of Galaxy

Xu Chongming Xu Genwen
(Department of Physics, Nanjing Normal University, Nanjing 210097)

Abstract

In this paper, the physical background of establishing the higher order gravitational theory for correcting Einstein's general relativity, especially for the dark matter problem, is discussed. The main higher–order gravitational theoies and their solutions are reviewed. Some attempts of resolving the difficulty on the rotation curve of galaxy without the dark matter in the light of higher–order gravitational theory have been made. But up to now, none of them is successful. We point out the difficulty in solving the problem and the necessity of a new kind of higher-order gravitational theory.

Key words higher–order gravitational theory—dark matter—rotation curve of galaxy