

# 关于土卫轨道—轨道共振源 起源和演化的研究

沈凯先 乔荣川

(中国科学院陕西天文台, 临潼 710600)

## 提 要

阐述了一种解释轨道—轨道共振起源和演化的主要学说——潮汐演化假说, 介绍了近年来在土卫的著名的三个共振对的起源和演化方面国外学者提出的一些理论, 并指出了这方面研究尚存在的不足。

## 一、引 言

众所周知, 在土星卫星的运动中存在一种特殊的很有研究价值的运动, 轨道—轨道共振运动(以下简称轨道共振)。已知的卫星中就有12个组成8个共振对, 其中4个共轨共振(coorbital motion), 3个 $(P+1):P$ 共振(这里 $P$ 为一小整数)和一个长期共振。Mimas-Tethys(简称为(Mi-Te))、Enceladus-Dione(En-Di), Titan-Hyperion(Ti-Hy)是三个著名的研究得最多的共振对, 它们都属于 $(P+1):P$ 型共振, 且因 $P+1-P=1$ , 故它们又都是所谓一阶共振型。

研究轨道共振的起源和演化有助于揭示太阳系的起源和演化, 共振的相对振幅和周期可以用来测定卫星的质量。土卫的三个共振对都有其各自的鲜明的运动特征, 能采用相对简洁的数学模型求得分析解, 因此近20多年来吸引了不少天文学家致力于对它们的研究。

尽管作为太阳系的小天体, 自然卫星和小行星在基本运动特征方面有很多相同和相似处, 但是由于各自的实际背景不尽相同, 它们的演化机制有很大的不同。自然卫星接近主星, 主星的潮汐力(一种非引力的力, 由卫星在主星上引起的潮汐产生)和扁率将对共振的演化机制产生重大影响, 而在土卫的三个共振对中, 除Ti-Hy可以和小行星一样看作是限制性三体问题, 其他两对由于卫星的质量彼此是可以比较的, 在深入研究时, 它们是些非限制性三体问题。

所谓共振, 即当两个绕同一母行星运转的卫星的平运动比接近两个小的整数比时发生的运动现象。其数学特征为摄动函数中的某个项(通约项, 或共振项)振幅增大, 频率减小, 以至这一项将在摄动函数中占主宰地位。从物理角度则解释为当行星和它的卫星相对位置发

国家自然科学基金和中国科学院天文委员会资助项目,

1991年12月22日收到。

1993年3月6日收到修改稿。

生周期性重复,其相互摄动将具有同样的周期,结果摄动效果将大大增强,导致了特殊的运动特征。

1954年 Roy 和 Ovenden<sup>[1]</sup>发表的研究结果表明,共振现象是随机产生的说法,很难解释观察到的共振数比随机产生的共振数多得多的事实。自那之后,比较一致的看法是需要建立一种机制来解释太阳系中这一些特殊现象的起源和演化。1965年 Goldreich<sup>[2]</sup>首次提出了一个较为完整的起源理论——潮汐说,这一理论成为研究自然卫星共振的基础。1969年 Allan<sup>[3]</sup>根据半长径在潮汐作用下扩张(expand)的假定推导出 Mi-Te 共振起源大约在  $2.4 \times 10^8$  yr 前。Greenberg<sup>[4,5]</sup>给出了一个分析 Ti-Hy 共振运动的数学模型,并作了分析求解。Allan、Sinclair<sup>[6,7]</sup>把 Mi-Te 的数学模型归结为一个一维的势阱深度随着时间变化的单摆的运动方程,从而讨论了它俘获到共振态的概率。Sinclair 还提出了 En-Di 可能被俘获的五种共振态,并且计算了各个共振态的俘获概率。Yoder<sup>[8,9]</sup>用分析理论对共振问题作了较深入的研究。Henrard<sup>[10]</sup>和 Lemaitre<sup>[11]</sup>建立了一种数学模型,并利用绝热不变原理给出在不同初始条件下演化过程的描述。本文将就这些工作作一简要的介绍。

## 二、简化数学模型

建立和求解轨道共振运动方程是一个复杂和困难的数学过程。要使深入研究得以进行,首先必须寻找和建立一个合适的作为研究共振运动参考的数学模型,也就是要简化实际模型。简化模型时,主要必需兼顾两个方面:采用的模型既要能反映出所研究的特定共振系统的实际运动所呈现的运动特征,另一方面又要求其尽量简单,使得在其之下能够便于充分利用现有的数学工具,即所用模型既不能太复杂,以至无法研究下去,又不能太简单,使得所研究的问题与实际背景有一段距离。

1966年 Garfinkel<sup>[12]</sup>最早提出一个简化模型,即理想共振模型。他对该模型作过明确定义:即哈密顿函数中只包含一个深共振项,其余的周期项都为一般项(Ordinary)。这种理想模型可以给出共振运动的基本特征,但也正如他自己指出的,大多数实际共振问题的背景与理想模型是有较大差异的。在 Liao<sup>[13,14]</sup>分类中的平均模型也就是简化模型,它包括 Schubart(数值平均)模型<sup>[15]</sup>, Liu<sup>[16,17]</sup>(分析平均)模型和 Garfinkel(理想共振)模型。我们认为前两者与第三者是有重要区别的,应该把它们归为两个不同类型的简化类型,这样更易于对模型建立的理解。理想模型建立在假定研究对象为圆型限制性三体问题上,它只包含一个深共振项,故可称为单共振项模型,实际上,目前土卫研究采用的模型也都是这类模型。Schubart, Liu 等人的模型是建立在假定对象为椭圆型限制性三体问题上的,它包含了两个以上的共振项,可称为非单共振项模型。实际上如果严格研究土卫的共振运动,应该采用非单共振项模型,但数学处理上会遇到相当大的困难。有幸的是土星的扁率对土卫运动有很大影响,它导致土卫轨道交点和拱线迅速进动,使得采用单共振项简化模型对研究土卫共振是一个很好的近似。

土卫模型中的另一重要特征是它包含一个慢变参数,这是因为土卫接近土星,潮汐力要影响它们的运动。但潮汐演化是一个缓慢的过程,慢变量变化很小,以至在一个相当长的时

间里可以合理地用所谓绝热不变原理来研究共振系统的演化。

其实每个共振问题都是一个特定的问题, 我们并不能有一个真正的模型, 它能够适应所有的情况。对不同的研究对象, 我们自然应选择尽可能接近其真实的实际背景模型, 而土卫的三个共振对有着不同的实际背景。

按 Allan<sup>[13]</sup>给出的摄动函数  $R$  展开式为:

$$R = -\sum \frac{Gm_1 m_2}{a_2} C \left( \frac{a_1}{a_2} \right) I_1^{l-m-2p_1} I_2^{l-m-2p_2} e_1^{q_1} e_2^{q_2} \cos \varphi$$

$$\varphi = (l-2p_1+q_1)\lambda_1 - (l-2p_2+q_2)\lambda_2 - (l-m-2p_1)\Omega_1 + (l-m-2p_2)\Omega_2 - q_1\omega_1 + q_2\omega_2$$

假定  $a_2 > a_1$ ,  $C$  是含  $a_1/a_2$ ,  $e_1^2$ ,  $e_2^2$ ,  $I_1^2$ ,  $I_2^2$  的级数, 其最低阶项为  $O(a_1/a_2)^l$ , 此展开式有一重要特征, 即  $\omega$  的系数与  $e$  的最低次幂相等,  $\Omega$  的系数与  $I$  的最低次幂相等。Ti-Hy 的共振项的共振变量是  $3\lambda_1 + 4\lambda_2 + \omega_1$ ; 而 En-Di 则为  $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \omega_1$ , 它们相应的系数都是  $O(e^l)$ , 故其单共振项简化模型为  $e$  型共振模型。Mi-Te 的共振变量为  $2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \Omega_1 + \Omega_2$ , 其相应系数是  $O(I_1, I_2)$ , 因而为  $I$  型共振模型。

Greenberg<sup>[18]</sup>在研究 Mi-Te 共振时曾提出一个多共振项模型, 即含多个不同的共振项, 但 Greenberg 并未去数学求解含两个以上共振项的共振运动, 而是假定系统总角动量相对土星为常数, 重新选择参考面, 再将多共振项问题仍归化为单共振项模型。Peal<sup>[19]</sup>则提出虽然采用单共振项模型对分析现存土卫共振运动的基本特征和结构是合理的, 但在探讨它们的起源和演化时, 这样的模型未必合理。他认为对模型进一步修正在描述 Ti-Hy 和 En-Di 的演化时是需要的, 对前者至少需包括共振变量的某些高次谐振项, 对后者几乎肯定要包括在 Enceladus 内的能耗, 只有 Mi-Te 共振仅用单共振项模型描述尚是合理的。

### 三、共振起源的潮汐说

研究自然卫星共振轨道的起源和演化涉及很多问题: 这些共振轨道是在太阳系形成时一开始就存在的, 还是以后由某种机制演化形成的。如果是后者, 它们又是什么时候形成的和怎样形成的。对自然卫星, 存在着俘获的可能, 那么在什么样的初始条件下才有可能俘获, 俘获的概率是多少。共振形成后, 它是否能持续下去, 而稳定的机制又是什么。

1954 年 Roy 和 Ovenden<sup>[20]</sup>审视了太阳系中 46 对行星和卫星的平运动比。1955<sup>[11]</sup> 年又研究了木星与太阳、土星卫星等的通约, 他们得出, 观察到的太阳系中的共振对数, 显然比由作随机分布假定可能的数要多, 卫星共振对的平运动分布呈现一个向  $n_2/n_1$  严格通约偏靠的趋势, 这表明共振轨道显然不是在太阳系形成初始时随机存在的, 而是由一种机制使许多原先处在非共振态的卫星逐渐演化到共振态。1960 年 Gold 曾在私人通信中提出由潮汐作用形成共振轨道的设想。1965 年 Goldreich<sup>[21]</sup>则首次提出了一个较完整的理论——潮汐说, 阐明了共振形成的一种可能的机制, 为以后自然卫星共振起源和演化的研究奠定了基础。其主要内容可作如下概括:

1. 由卫星引力引起的母行星的潮汐对卫星产生的潮汐力矩导致卫星的平运动, 在与太阳系相当的时间(如 40 亿年)里发生明显的变化,

由潮汐作用导致的卫星平运动速率的变化为

$$\frac{dn_r}{dt} = -\frac{27n^2}{4} \left(\frac{m}{M}\right) \left(\frac{R}{a}\right)^5 \frac{1}{Q}$$

这里  $R$  是土星的赤道半径,  $Q$  为潮汐耗散因子, 它定义为一个周期内贮存的最大能量的  $2\pi$  倍除以在同周期内的能耗。Goldreich 给出了几个行星  $Q$  值的上下界, 对土星  $(6-7) \times 10^4 \geq Q \geq 6.4 \times 10^4$ 。土卫平运动潮汐变化数学式有  $n/n_0 = \{1/[1-13(d\zeta/dt)T]\}^{3/13}$ ,  $T$  是平运动自  $n_0$  时起以来的时间,  $\zeta = (n/n_0)^{1/3}$ 。Jeffereys<sup>[21]</sup> 给出太阳系所有卫星的  $d\zeta/dt$ 。以 Mimas 为例,  $d\zeta/dt \approx 2.1 \times 11^{-11} \cdot \text{yr}^{-1}$ , 则由上式可估出在与太阳系相当的时间里  $n/n_0 \approx 1.82$ , 因此 Mimas 是有可能演化成一个共振星的。

2. 各卫星由潮汐力引起的平运动变化是彼此独立的, 依赖于卫星的质量和与主星的距离。不同卫星平运动的变化速率不同, 其比值随时间变化, 这样它们就有可能演变为通约关系。

泊松定理称, 在只有卫星相互引力存在的条件下, 至少在一、二阶摄动里半长径没有长期项, 也即平运动没有长期项, 这意味着泊松定理保证了在卫星的演化过程中相互引力对它们的演化是没有影响的, 唯一的影响来自潮汐力, 因此卫星是彼此独立地各自演化。

3. 一旦共振形成后, 在潮汐力的作用下, 共振状态或保持下去或遭破坏。

Goldreich 以 En-Di 为例讨论了共振保持的可能。他把问题简化为圆型限制性三体问题, 而后作了一个初步的一阶解的推导, 得出在受迫偏心率  $e_{02} \ll 1$  的条件下,  $e_{02}$  随着接近共振  $(2n_2 - n_1 - \frac{d\omega}{dt} \rightarrow 0)$  而增加, 导致  $\left| 2 \frac{dn_2}{dt} - \frac{dn_1}{dt} \right|$  将持续减小。这样随着接近共振, 潮汐力的作用将持续减小, 共振得以维持。

4. 共振稳定的必要条件是卫星间的引力足够大, 能以维持通约关系所必需的方式将主星的角动量转移给卫星系统。角动量必须由主星转移给卫星系统似乎与半长径不变的泊松定理相违背, 但 Goldreich 指出泊松定理是就  $\alpha$  中的长期项而言的, 而在卫星通约的稳定机制中, 导致角动量长期转移的是周期项, 只不过此周期项为共振项, 它们的周期相当长。

Goldreich 的潮汐理论可以适用于大多数近主星的卫星, 在他之后的众多学者的研究, 则针对各个具体的共振问题进行了更深入的探讨。

## 四、对土卫三共振对的研究

### 1. Titan-Hyperion

Ti-Hy 为 4:3 共振, 振动中心为外卫星(Hyperion)的远心点, 振幅为  $36^\circ$ , 这对共振运动是土卫三共振对中唯一典型的限制性三体题, 因为有  $m_H \ll m_T$ , 由于这对卫星离主星较远, 究竟潮汐作用在它们的演化中能否起有意义的影响尚还有不同的看法。

1973 年 Greenberg<sup>[41]</sup> 对这对共振星的运动和演化作了分析求解。他假定了问题为圆型限制性三体问题, 即设  $i_1 = i_2 = 0$ ,  $e_1 = 0$ , 又认为  $e_2$  足够小, 故他所取模型为小偏心率单共振项模型。摄动函数  $R$  简化为  $Gm_1/2a_2[b(\alpha) + e_2C(\alpha)\cos\varphi]$ , 这里  $\alpha = a_1/a_2$ ,  $b(\alpha)$  为拉普

拉斯系数; 共振变量  $\varphi \equiv 4\lambda_2 - 3\lambda_1 - \tilde{\omega}_2$ 。利用拉格朗日方程可得:

$$\dot{\varphi} = 4n_2 - 3n_1 - \left(\frac{m}{M}\right) \frac{n^2 C(\alpha)}{2e_2} \cos \varphi$$

对拉格朗日方程作无量纲变换:

$$\tau = \int_0^t n_1 dt, \quad \mu = m_1/M_1, \quad e = e_2, \quad n = n_2/n_1$$

得无量纲的三组方程

$$\dot{e} = -\frac{1}{2} \mu n C(n) \sin \varphi$$

$$\dot{n} = 6e \mu n^2 C(n) \sin \varphi - n F_T$$

$$\dot{\varphi} = 4n - 3 - \left(\frac{1}{2e}\right) \mu n C(n) \cos \varphi$$

第二式右端第二项即是潮汐力  $F_T = \frac{1}{n_1^2} \frac{dn_1}{dt} = -\frac{27}{4} \left(\frac{R}{a_1}\right)^5 \left(\frac{m_1}{M}\right) \frac{1}{Q}$ , 因外卫星又小又远, 潮汐

力对它影响可忽略, 故这里的  $F_T$  不含  $n_2$ 。

Greenberg 在先假定无潮汐力即  $F_T = 0$  的情况下, 推得一个  $e$  的四次方程  $-e \cos \varphi + B(k_0)e^2 - e^4 = C_0$ , 积分常数  $C_0$  由初始条件  $e_0, k_0$  确定,  $k_0$  是与系统接近共振程度有关的常数。在由上式解得相轨迹后, Greenberg 得出如下结论:

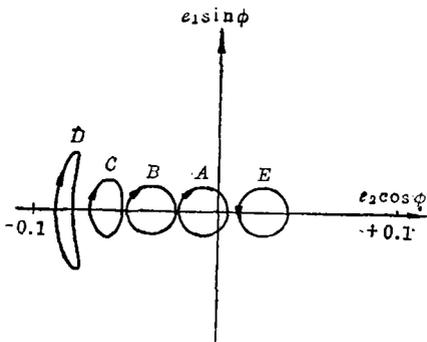


图 1  $F_T=0$  时的相轨迹

(1) 对于小偏心率  $e_0$ , 轨迹为一个圆, 如图 1 中 A、B、E; 包含源点在内的圆, 如 A 对应圆运动, 而原点在圆外的则对应振动, 如 B、E; 图中 B 的振动中心为  $\pi$ , E 则为 0。A、B 上的平运动  $n$  均是常数。

(2) 对相对大偏心率  $e_0$ , 轨迹变形为豆状或弯月形闭合曲线。如图 C、D, 其振动中心也是  $\pi$ 。由于  $e_{0Hy} > 0.04$ , 所以实际上不可能有相对  $\varphi = 0$  的振动存在, 也就是说共振是相对 Hyperion 的远心点。

在引入潮汐力  $F_T$  之后, 上述解的原先的对称闭合就不再能保持。但由于潮汐力终是小量, 其影响可作为摄动处理, 原先轨道摄动计算中的参数变易法在此仍可采用, 即求解确定每个圆的参数 ( $e_0, k_0$ ) 在潮汐力作用下的缓慢变化, Greenberg 由此得到一些结果:

(i) 系统原先处在非共振态, 如相空间中的圆 A, 在潮汐力的作用下向左移动。演变成振动态 B, 以后逐渐变形成豆状, 达到如图中的 C、D。

(ii) 演化的特征与  $F$  无关, 但演化的速率与  $F$  成正比。

(iii) 演化的周期开始时迅速增加, 到一定时候跟着一个急剧下降, 这是因为开始阶段是小  $e$  机制,  $e$  的增加减弱了共振恢复机制, 到一定时候大  $e$  机制占主导, 进一步增大  $e$ , 就加强了通约的恢复机制, 共振周期迅速减小。

(iv) 此共振的振幅并不像单摆运动那样随时间有明显减小, 因此我们不能指望由它们的

振幅变化去估算共振的年龄。

Greenberg 的模型得到一些 Ti-Hy 的起源和演化的基本特征,但正如他自己指出的,模型与实际是有距离的。若  $e_{Hy}$  是如此大以至模型假定它足够小而只取  $e$  的最低次项是否合理值得怀疑,  $e_{Ti} = 0.029$ , 模型将它看作圆轨道也是不合适的。

1965 年 Goldreich 认为,这对共振潮汐力可能太小,不足以引起重要的演化。Sinclair 也提出 Titan 对 Hyperion 的摄动足以抵消潮汐力的影响,到目前为止,还没有一种机制能给出满意的解释,只得出共振阻止了两星不断靠近,防止了 Hyperion 轨道招致灾难性的突变。

目前一些学者还在继续采用不同的方法求共振解。Gerasimov 和 Mushailov<sup>[28]</sup> 在仍取圆型限制性问题的假设下,考虑土星的扁率求得 Ti-Hy 的一个新的分析共振解,并称由此得到 Hyperion 的所有演化特征。Duriez<sup>[29]</sup> 则推得了一种半数值展开的方法,这种方法能很好给出 Ti-Hy 和 Mi-Te 共振的主要共振项。据介绍,他也由此得到 Ti-Hy 的一些演化特征。

## 2. Enceladus-Dione

$E_n-D_i$  为 2:1 共振,振动中心为内卫星(Enceladus)的近心点,振幅为  $1^\circ.5$ ,这对卫星的质量是彼此可以比较的,因此严格处理时,它们应是非限制性问題。两星中大质量是外卫星,小质量星是内卫星,这就需要确定是外卫星还是内卫星在潮汐演化中占主导地位,也就是要确定是  $F_T > 0$ , 或  $F_T < 0$ 。分析表明,对  $F_T < 0$ , 共振中心应是内卫星的近星点,而对  $F_T < 0$ , 共振中心应是外卫星的远心点。显然对  $E_n-D_i$  应是  $F_T < 0$ , 故应是内卫星占主导地位。

1972 年 Sinclair<sup>[5]</sup> 对  $E_n-D_i$  的起源和演化作了较详细的研究。首先他引入了四个新的变量  $\theta = l - 2(\lambda - \lambda')$ ,  $\theta' = l' - (\lambda - \lambda')$ ,  $\varphi = l + g - 2(\lambda - \lambda')$ ,  $\varphi' = l' + g' - (\lambda - \lambda')$  (这里“'”表示外卫星),然后把摄动函数展开式中的一些主要项的幅角表示成新变量和  $(\lambda - \lambda')$  的组合。他指出只有五种组合有可能成为相应深共振项的共振变量。它们是  $\varphi'$ ,  $\varphi + \varphi'$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\theta'$ 。他称之为五种共振态。这些共振变量变率为:

$$\dot{\theta} = 2n' - n - \dot{\omega}, \quad \dot{\theta}' = 2n' - n - \dot{\omega}, \quad 2\dot{\varphi} = 4n' - 2n - 2\dot{\Omega}, \quad 2\dot{\varphi}' = 4n' - 2n - 2\dot{\Omega}'$$

$$\dot{\varphi} + \dot{\varphi}' = 4n' - 2n - \dot{\Omega} - \dot{\Omega}'$$

由于扁率的作用,  $\Omega$  和有  $\dot{\omega}$  较大的进动。Mimas:  $\dot{\omega} = -\dot{\Omega} = 360^\circ \cdot \text{yr}^{-1}$ , Tethys:  $\dot{\omega}' = -\dot{\Omega}' = 70^\circ \cdot \text{yr}^{-1}$ , Enceladus:  $\dot{\omega} = -\dot{\Omega} = 150^\circ \cdot \text{yr}^{-1}$ , Dione:  $\dot{\omega}' = -\dot{\Omega}' = 30^\circ \cdot \text{yr}^{-1}$ 。这样上述变量的频率被明显分开,含上述变量的项不太可能同时成为深共振项。潮汐作用只是改变  $2n' - n$ , 于是在潮汐作用下含五种共振变量的项就会按上述的顺序逐个成为深共振项,也就是说系统在演化过程中顺次通过五种共振态。Sinclair 还认为如果系统被某个共振态所俘获,它就将持久留在那里,因此系统目前所在的状态必是最后被俘获的状态。Sinclair 1972 年,1974 年<sup>[5,6]</sup> 的工作就在于解释  $E_n-D_i$  是怎样避免前四种共振态的俘获到达目前的  $\theta$  共振态的,他的重要贡献在于采用了对单摆运动方程数值求解的方法(将在 Mi-Te 中简要介绍)分别求得前四种状态避免俘获的概率,对  $\varphi$  共振是 0.58,  $\varphi + \varphi'$  是 0.77,  $\varphi'$  是 0.70,  $\theta'$  是 0.81。此外, Sinclair 还探讨了在不同初始条件下的演化,他给出了一个初始  $e_0$  的极

值  $e^* = 0.019$ 。目前 Enceladus 的  $e$  (0.0044) 小于此值, 因此它俘到  $\theta$  状态是必然的。

1976 年 Peal<sup>[22]</sup> 提出  $\omega$  中含有共振项的贡献部分,  $\dot{\omega}_{\text{res}} = n_0 |K| \frac{m'}{M} \frac{a_0}{a'} C e^{(1/K)-2}$ , 对 2:1 共振  $K=1$ , 如果  $e_0$  太小, 则  $\dot{\omega}_{\text{res}}$  可能会很大且是负值 ( $C < 0$ ), 故系统演化时首先就进入  $\theta$  共振态, 这样自然没有进入其他四种共振态的可能。

En-Di 的另一重要特征是共振振幅很小, 这意味着系统或者曾有相当典型的随机初始条件, 或者存在某种机制驱使振幅减小至目前值。但 Sinclair 认为, 与 Allan 在研究 Mi-Te 时将振幅减小归于潮汐力所致不同, 对 En-Di 潮汐力不太可能在太阳系存在的时间里将其振幅减小到目前这样小, 很可能共振俘获和以后的振幅减小都是相同原因所致, 即在潮汐力和共振效应的联合作用下轨道倾角或偏心率长期增加的结果。

### 3. Mimas-Tethys

Mi-Te 也是 2:1 型共振, 振动中心为两卫星轨道升交点的中点, 振幅为  $97^\circ$ 。它是土卫中也是太阳系中唯一倾角 I 型共振, 用经典理论解释其演化机制遇到不少困难。Allan<sup>[21]</sup>, Sinclair<sup>[6]</sup> 都通过对共振变量  $\psi \equiv \varphi + \varphi' = 4\lambda_2 - 2\lambda_1 - \Omega_2 - \Omega_1$  的时间微分得到一个类似于粒子位于一个一维势阱, 而阱深随时间增加的运动方程:

$$\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 = -k^2 \cos \varphi + F\psi + E + O(\mu^{3/2})$$

式中  $k$  为常数,  $F = \dot{n} - 2\dot{n}' < 0$  为潮汐力,  $E$  为势阱深度, 是时间的函数, 即势阱深度随时间增加。初始时粒子作圆运动, 由于潮汐力为负, 每完成一周  $\psi$  减小  $\Delta\psi^2 (\approx 4F\pi)$ , 见图 2)。当  $\psi^2 = 0$  时, 粒子不再前进而要改变方向, 这时粒子通过非稳定平衡点 ( $\psi = \pi$  附近)。如图示, 粒子在改变方向前后的最近一圈两次过极小值时  $\dot{\psi}^2$  有个差  $\delta\dot{\psi}^2$ , 这是由阱深增加引起的。如果  $\delta\dot{\psi}^2 > \dot{\psi}_1^2$ ,  $\dot{\psi}^2$  将再次为 0, 于是振动开始, 粒子进入振动状态。假定  $\dot{\psi}_1^2$  在 0 至  $\Delta\dot{\psi}^2$  之间任何值都是等概率的, 也即初始有随机的能量, 则粒子俘获概率为  $\delta^2\dot{\psi} / \Delta\dot{\psi}^2$ 。Sinclair<sup>[6]</sup> 通过对  $\dot{\psi}$  的各种初始条件进行数值积分, 求得对 Mi-Te 的  $\varphi + \varphi'$  共振有  $\delta\dot{\psi} = 0.2\Delta\dot{\psi}$  关系式, 从而俘获概率为 0.04, 同样可求得对  $2\varphi$  共振为 0.07。

1969 年 Allan<sup>[10]</sup> 估算了共振形成的年龄大约是  $2.4 \times 10^9 \text{yr}$ , 远小于太阳系形成的年龄。他由两个途径进行推算: (1) 由卫星的黄径振幅比  $\delta\lambda_1 : \delta\lambda_2$  和  $a_1 : a_2$  求得质量比  $\mu/\mu' = 17.04$ , 根据判别式  $\mu/\mu' < (n/n')^{13/13} (= 20.6)$  确定  $F$  为负值, 并判定在共振存在期间有  $dI/d\alpha, dI'/d\alpha$  大于 0。从  $I, I'$  的目前值按时间反推到  $I$  或  $I'$  为 0, 由此得到一个共振年龄的上限  $2.4 \times 10^9 \text{yr}$ 。(2) 求得在共振期间振幅  $\varphi_m$  随  $\alpha$  的变化。取目前的初始值  $\varphi_m = 97^\circ.04$ ,  $I = 1^\circ.5167$ ,  $I' = 1^\circ.0927$  按时间积分反推求得  $\varphi_m$  达到  $180^\circ$  为止。这样可得共振形成年龄约为  $2.23 \times 10^8 \text{yr}$ 。

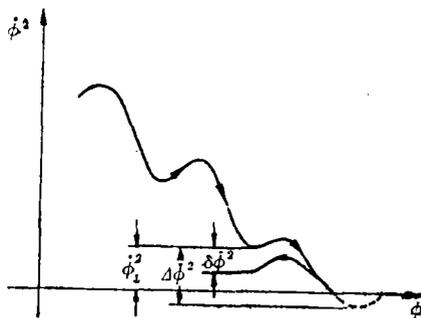


图 2 受外力距作用一类单摆运动的  $\dot{\psi}^2 \sim \varphi$  图。曲线为时间不对称,  $\dot{\psi}_1^2$  是摆方向改变前最后一次摆顶点 (不平衡点) 时的动能,  $\Delta\dot{\psi}^2$  是最大可能值,  $\delta\dot{\psi}^2$  是变向后再次过顶点时动能的变化。如  $\delta\dot{\psi}^2 > \dot{\psi}_1^2$  则俘获发生。

### 五、HL模型和它的演化描述

1983年 Henrard 和 Lemaitre<sup>[10]</sup> 提出了一种简化模型，他们称之为第二类基本共振模型，其实这也是一个单共振模型。但 Henrard 等由这个模型得到的演化相平面可使一个复杂的演化过程的描述大大简化，并可得到一些有用的结果。

Henrard 给出的哈密顿为  $K = -\Delta R + R^2 - 2\sqrt{2R} \cos \varphi$ ,  $\Delta = 3(1 + \delta)$ ,  $\delta' = -\left(\frac{4\alpha}{27\beta^2}\right)^{1/3} - 1$ , 其中  $\alpha = (jn_1 - (j+k)n_2 + k\omega)/k$ ,  $k, j$  是小整数,  $\alpha$  表征了轨道的共振深度, 它是模型中唯一的慢变量,  $\varepsilon$  与振动恢复力相关,  $\beta$  接近 1. Henrard 指出,  $\varepsilon, \beta$  与  $\alpha$  相比可近似看作为常数是应用 HL 模型的必要条件, 因此有  $\delta \propto \alpha, \delta$  的变化主要来自潮

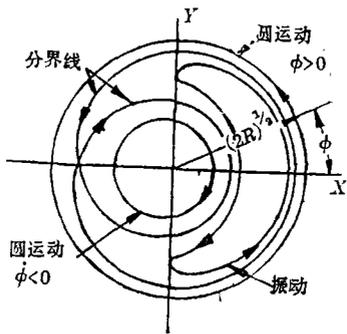


图 3 二体轨道共振的一组典型的等位线。图中给出正负圆运动和振动运动相应曲线以及作为分界的临界线(Separatrix)

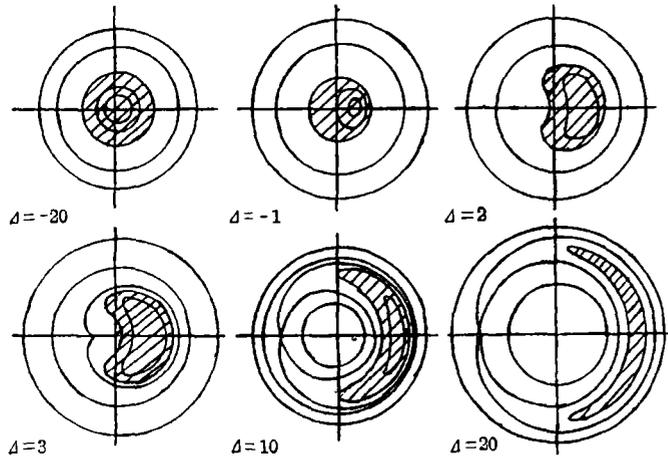


图 4 二体共振等位线潮汐演化描述。图中对一特定轨迹包围的面积(斜线区)由初始条件确定, 且是一守恒的作用量。演化图给出了自动俘获过程

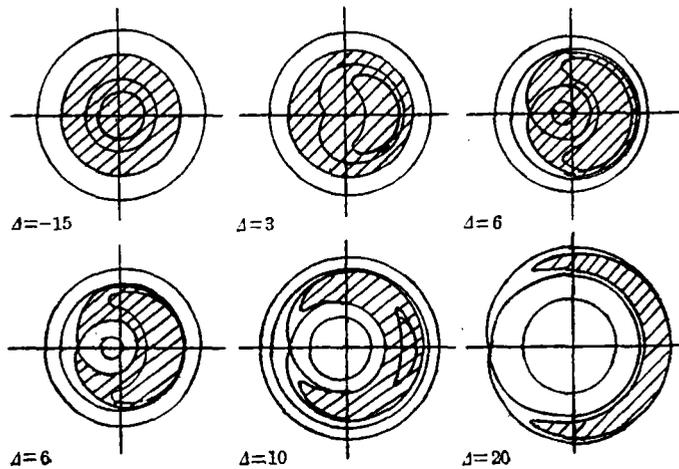


图 5 与图 4 类同的演化。不同处在于初始的  $e$  大, 临界线形成在达到共振之前, 这里的俘获是概率的  $\Delta=6$  发生态变时, 作用量有一个跃变

汐力的作用, 这样轨道随  $\delta$  的变化显然表示了轨道在潮汐力作用下的演化。

$$\text{令 } x = \sqrt{2R} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{2R} \sin \varphi$$

$$\text{上式变为 } \dot{x} = -\frac{\partial K}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial K}{\partial x}$$

平衡点由  $\partial K/\partial x = \partial K/\partial y = 0$  得出, 它们是  $x^3 - \Delta x - 2 = 0, y = 0$  的根。对  $\delta < 0 (\Delta < 3)$  上式没有负根, 只有一个正实根, 而对  $\delta > 0 (\Delta > 3)$  则有两个负实根和一个正实根。图 3 给出当  $\Delta = 9$  的一组典型的等位线, 图中一条临界线把圆运动和振动分开。 $\delta$  变化时, 严格地说上述等位线不再闭合, 但由于  $\delta$  变化是很缓慢的, 实际轨迹非常接近相图中  $\Delta$  为常数的闭合曲线。Henrard 由此引入所谓绝热不变原理, 即在  $\Delta$  变化很缓慢时, 由轨迹包围的面积在相当长的时间段里可以认为是不变的 (Henrard 在文献[11]中第 6 节对这个原理有明确的定义), 以积分式表示为  $J = \oint R d\varphi = \oint x dy$ 。面积不变原理不适用的唯一例外发生在当轨道穿过临界线时, 这时由于相点在临界线上渐近趋于不稳定平衡点, 其周期将是无限的, 经典的定理不再适用, 演化的这一刻叫做态变 (Transition), 在这以后进一步演化时, 面积仍然不变, 只是保持在一个新的常数上。

$$\dot{\alpha} = \dot{n}_1 - 2\dot{n}_2 + \frac{d\dot{\omega}}{dt} \approx \dot{n}_1 - 2\dot{n}_2 = F$$

潮汐力  $F$  对这三个共振对都是负值, 故  $\dot{\alpha} < 0$ 。  $\alpha$  和  $\delta$  反号, 则  $\dot{\delta} > 0$ , 即在演化过程中  $\delta$  应是增加的。图 4 和图 5 给出两组相平面演化图, 图中  $\delta$  都是增加的, 不同的是初始条件不同。第一组相应于初始轨迹具有小偏心率, 第二组相应于大偏心率,  $\delta = 0 (\Delta = 3)$  时图中出现临界线。由这两组演化图很易得出在不同初始条件下的演化结局。如初始轨迹所围面积小于  $\Delta = 3$  时的临界线下所围面积, 轨道必然自动俘获到共振态, 反之, 则演化结局有两种可能: 或进入内外临界线包围的面积内, 即俘获发生; 或进入内临界线内成为圆运动, 即发生逃逸 (escape), 后者的俘获就是概率的。

Henrard 并由此还得出一些有价值的结果:

1. 给出一个与初始偏心率  $e_0$  的判别式  $e_0^2 < \frac{6}{m\sqrt{\mu\alpha_1}} \left(\frac{\varepsilon}{2\beta}\right)^{2/3}$  俘获是自动的, 否则便是概率的。

2. 估算了一些共振对的年龄。如对 En-Di, 代入已知的参数值, 算出  $\alpha, \beta, \varepsilon$ , 求得  $\delta = -2.0$ , 这表明 En-Di 目前处在临界线出现之前的位置, 再求得这之前轨迹刚通过原点时, 也即共振刚形成时的  $\delta = -62.5$ , 由此可求出  $\Delta\alpha$ 。共振的年龄  $T = (\Delta\alpha/\dot{\alpha})$ ,  $\dot{\alpha}$  可按前式算出, 取 Goldreich 的  $Q$  值, 最后可求得此共振的年龄约为 1.6Gyr。

3. 给出新的求俘获概率的公式(略)。

## 六、结 束 语

综观所述, 近年来在土卫共振起源和演化方面已作了许多研究, 一种理论——潮汐说正在建立, 但已作的研究还是初步的, 理论也不够完善。譬如到目前的研究中, 正如 Peal 指出的, 在简化模型方面, 仅采用单共振项模型是不够的, 而把非限制性问题看作限制性三体问题也不尽合理。另外对共振稳定机制的研究也未见做出令人信服的工作, 然而, 毕竟对这一问题的研究, 先行者已奠定了一些基础。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Roy, A. E., and Oveden, M. W., *M. N. R. A. S.*, 115 (1955), 296.  
 [ 2 ] Goldreich, P., *M. N. R. A. S.*, 130 (1965), 159.  
 [ 3 ] Allan, R. R., *A. J.*, 174 (1969), 497.  
 [ 4 ] Greenberg, R. J., *A. J.*, 78 (1973), 338.  
 [ 5 ] Greenberg, R. J. Counselman, C. C, and Shapiro, I. I, *Science*, 178 (1972), 747.  
 [ 6 ] Sinclair, A. T., *M. N. R. A. S.*, 160 (1972), 169.  
 [ 7 ] Sinclair, A. T., *M. N. R. A. S.*, 166 (1974), 165.  
 [ 8 ] Yoder, C., On the establishment and evolution of orbit-orbit resonances, PhD thesis. Univ. Calif., Santa Barbara, 303 pp, (1973).  
 [ 9 ] Yoder, C., *Celest. Mech.*, 19 (1979), 3.  
 [ 10 ] Henrard, J. *Celest. Mech.*, 27 (1982), 3.  
 [ 11 ] Henrard, J. and Lemaitre, A., *Celest. Mech.* 30 (1983), 197.  
 [ 12 ] Garfinkel, B., *A. J.*, 71 (1966), No. 1344.  
 [ 13 ] 廖新浩, 刘 林, 天文学报, 28 (1987), 11.  
 [ 14 ] 廖新浩, 刘 林, 紫金山天文台台刊, 8 (1989), 229.  
 [ 15 ] Schubart, J., Smithsonian Astrophys. Obs. Special Report, (1964), 149.  
 [ 16 ] Liu, L., Innanen, K. A. and Zhang, S. P., *A. J.*, 90 (1985), 877.  
 [ 17 ] Liu, L., and Innanen, K. A., *A. J.* 90 (1985), 887.  
 [ 18 ] Greenberg, R. J., *Vista in Astronomy*, 21 (1977), 209.  
 [ 19 ] Peal, S. J., in *Satellites of Saturn*, ed. by J. A. Burns and M. S. Matthew, p. 159, (1986).  
 [ 20 ] Roy, A. E. and Oveden, M. W., *M. N. R. A. S.*, 114 (1954), 232.  
 [ 21 ] Jeffereys, M., *M. N. R. A. S.*, 117 (1957), 585.  
 [ 22 ] Peal, S. J., *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 14 (1976), 215.  
 [ 23 ] Sinclair, A. T., A reconsideration of the evolution hypothesis of the origin of the resonances among Saturn's satellites, pers. communication.  
 [ 24 ] Smith, B. A. et al., *Science*, 215 (1982), 504.  
 [ 25 ] S. Ferraz-Mello, A resonance amongst planetary satellites, pers. comm.,  
 [ 26 ] Goldreich, P. and Soter, S., *Icarus*, 5 (1966), 375.  
 [ 27 ] 沈凯先, 天文与时频, (1983)总第13期, 13; 总第15期, 10.  
 [ 28 ] Gerasimov, V. P., Mushailov B. R., *Astron. J. Acad. Sc. SSSR*, 68, (1991), 411.  
 [ 29 ] Duriez, L., 2ième Table Ronde de Planetologie Dynamique, Varš, Mars 1990, ed. by D. Ecnest and C. Froeschle, Observatoire de Nice.

(责任编辑 刘金铭)

## On Studies of the Origin and Evolution of the Orbit-orbit Resonances among Saturnian Satellites

Shen Kaixian Qiao Rongchuan

(Shaanxi Astronomical Observatory, Academia Sinica, Lintong 710600)

### Abstract

The object of this paper is to bring the description of a hypothesis that the origin and evolution of orbit-orbit resonance among natural satellites are due to the result of the dissipation of tidal energy, and to give a review of the some theories proposed by various authors in the study of the evolution of three famous resonant pair among Saturnian satellites. In addition, some deficiencies of these theories have been point out also.