第4卷 第2期 天文学进展 Vol. 4, No. 2
1986年4—6月 PROGRESS IN ASTRONOMY April—June, 1986

动力系统的数值研究

孙义燧
(南京大学天文系)

提　　要

本文介绍了天体力学家在动力系统数值研究中的贡献及其研究方法，并着重介绍了法国天体力学家M. Hénon在动力系统数值研究中的杰出工作，他的研究结果不但被天体力学家广泛地引用，而且引起了数学家和物理学家的高度重视，人们称他所研究过的映射为Hénon映射。

很多涉及力学、天文、物理等学科的问题，能用n阶常微分方程来描述，即

$$\frac{dx}{dt}=X(x_1, \cdots, x_n, t)$$

其中x, X皆为n维向量，由初值t_0与x_0可以确定此方程组的唯一解

$$x=x(t; t_0, x_0),$$

它满足条件

$$x(t_0; t_0, x_0)=x_0。$$

从几何上来看，上述方程在$n+1$维空间$(x_1, \cdots, x_n, t)$中确定了一个方向场，其满足初值的解为通过点(t_0, x_0)的积分曲线，此时把t理解为$n+1$个坐标中的一个，这种解释是静止的，不变的，因而不能很好地适应天文、物理等方面问题的需要。现在从动的观点来解释上述方程及其解，这一观点最先由Poincaré提出，他把t理解为时间，x理解为n维空间中坐标为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的点，在任何时刻，方程确定n维空间中的一个速度场。存在唯一性定理的物理意义是：对给定的初始时刻t_0和初始点x_0，存在此速度场中唯一的运动，在这样的解释下，称原方程为一个动力系统，n维空间$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为相空间，运动所确定的相空间中的曲线为轨线或轨道，显然，n维相空间$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中的轨线就是$n+1$维空间$(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$中积分曲线的投影。

我们知道，对定常系统而言，其解构成一个单参数的点变换群，有了变换群的概念，很自然地就可以将动力系统的理论推广到抽象空间和曲面上。在诸态遍历理论中，我们这样来定义动力系统：设M为一个紧的流形，μ为此流形上标准化测度，D^t为一族测度不变的单参数微分同胚$M \to M$，并满足结合律，则(M, μ, D^t)便称为一个经典动力系统。

动力系统分连续动力系统和离散动力系统两类，比如微分方程所定义的动力系统就是连续的，而由映射定义的动力系统则为离散的。对每一类动力系统，按照不同的物理背景，又可分为保守系统和耗散系统。众所周知，利用Poincaré截面可将连续的动力系统简化为低一

1984年12月11日收到。

维的离散动力系统[1]，当然还有其他方法将连续动力系统的研究转化为相应离散动力系统的研究，例如天体力学中圆型平面限制性三体问题中周期解的存在性与受摄扭转映射相联系[2]。另外，利用 Chirikov 的δ-函数方法，可将天体力学中的共振问题归化为标准映射(也叫Taylor映射)的研究[3],[4]。当然，数值方法只能研究离散动力系统或离散化后的连续动力系统。动力系统的数值研究近二十年来有了很大的发展，这是由于高速电子计算机的应用。因为实际问题涉及到的动力系统很复杂，所以要得到严格的数学结论也是非常困难的，正如Arnold所指出的，动力学中的不可积问题非现代数学工具所能及，KAM 理论的建立在这方面取得了一些重要进展。除此之外，关于轨道的性态几乎毫无所知[5]。但是，利用计算机可以将很复杂的动力系统的性态显示出来。现在越来越多的人认为，数值计算的结果与物理实验具有同等的效力。Hénon 把用数值方法研究模型问题称之为实验数学。

动力系统的研究开始于数学家和天文学家，现在不但广泛应用于物理学，也应用于其他学科，如化学、生物、气象等；Froeschlé 等还准备把动力系统的一些结果应用到社会科学中去。就动力系统的数值研究方法而言，有分频采样法、功率谱分析法等，但在天体力学中，常用的为 Poincaré 截面法(或直接轨道显示法)和 Lyapunov 特征数法。由于有关动力系统数值研究方面的论文在急剧增加，因此很难作全面的介绍，下面只是介绍天体力学家在这方面的一些研究成果。

1. 保守系统 在保守动力系统的数值研究中，最早的、也是最著名的是Hénon和 Heiles在1964年所作的工作[6]。他们用Poincaré 截面法研究在具有轴对称引力场的星系中，恒星运动的第三积分的存在性，这个问题完全等价于一个具有 2 个自由度的动力系统：

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{1}$$

其中

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 2x^2 y - \frac{2}{3}y^3\right),$$

此系统具有能量积分，即运动被限制在一个 3 维能量曲面上，再作 Poincaré 截面，则轨道与此截面的交点形成一个平面上的点变换(映射)，此映射的不变流形存在区域(或有序区)对应于运动方程的可积区，而映射的无序区(也称诸态遍历区，随机区，混沌区)对应于运动方程的不可积区。结果表明，可积区的相对面积随系统总能量 E 的增加而减小(见图1，2)，当 $E=0.16667$时，可积区几乎完全消失，整个映射定义的区域为混沌区(见图 3)，因此对第三积分的存在性，不能简单地回答存在或不存在。从理论上可知，2 个自由度的动力系统能被简化为一个 2 维保面积映射，作为一个验证与比较，Hénon 和Heiles 还研究了如下的一个保面积映射[6]

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + a(y_i - y_i^3), \\ y_{i+1} = y_i - a(x_{i+1} - x_{i+1}^3), \end{cases} \tag{2}$$

其中$a=1.6$，其映射图非常类似于图 2 中的右端部分(见图 4)，这表明保面积映射的确等价于关于第三积分的动力学问题。他们从数值结果中发现，在映射的有序区，初始两点的距离随迭代次数线性增长，而在混沌区，距离以指数形式增长，Benettin 等人正因为受这个结果的启

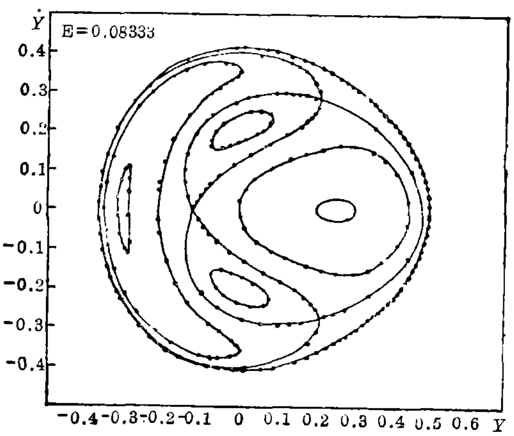

图 1

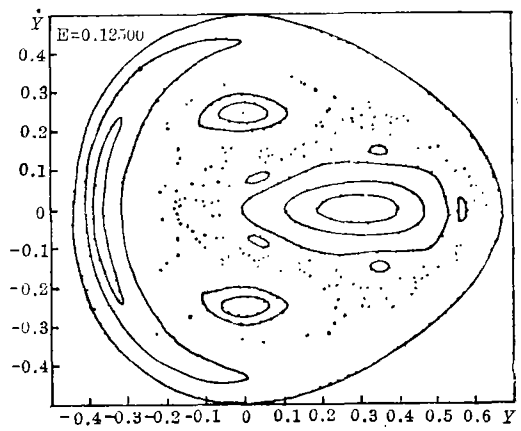

图 2

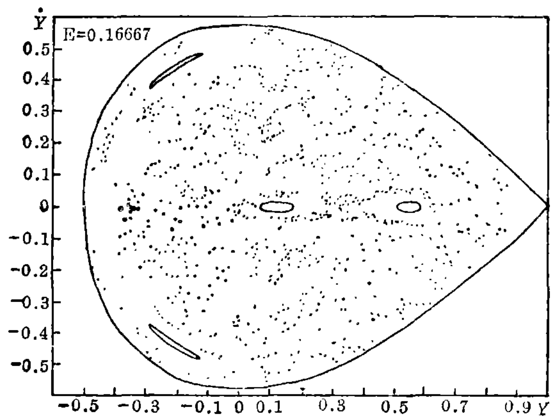

图 3

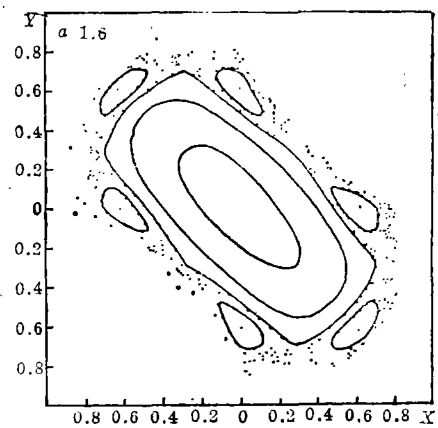

图 4

发，提出用表示无限接近的初始点间距离的指数增长率的 Lyapunov 特征数（LCN's）来判断有序区与混沌区，即当点处于有序区时，对应的 LCN's 为零，而对混沌区中的点，LCN's 则具有非零值。大量的数值结果表明，LCN's 确是动力系统随机性质的一个很好指示器，这些结论已在理论上被严格证明。另外，Hénon 还研究了 2 次保面积映射族[19]

$$\begin{cases} x_{i+1}=x_i\cos\alpha-(y_i-x_i^2)\sin\alpha, \\ y_{i+1}=x_i\sin\alpha+(y_i-x_i^2)\cos\alpha, \end{cases} \tag{3}$$

其中 α 为参数，他在这篇文章中进一步阐明了动力系统数值研究的方法，并再一次证实了 Birkheff、Arnold 等早已预言过的、保守动力系统中的"无穷嵌套的自相似的几何结构"，有时称为"世界中有世界"的这一普遍性质。在此基础上，Froeschlé 研究了高维的保守动力系统，他首先研究如下的一个(x,y,z,t)空间到自身的 4 维保测度映射族[10]

$$\left\{\begin{aligned}x_{i+1}&=x_i+a_1\sin(x_i+y_i)+b\sin(x_i+y_i+z_i+t_i),\\y_{i+1}&=x_i+y_i,\\z_{i+1}&=z_i+a_2\sin(z_i+t_i)+b\sin(x_i+y_i+z_i+t_i),\\t_{i+1}&=z_i+t_i,\end{aligned}\right.\quad(\mathrm{mod}\ 2\pi)\qquad(4)$$

其中$a_1=a_2=-1.3$，$b=0.01$，这个映射是 Arnold 给 Hénon 的私人通信中提出来的，主要是为了研究 Arnold 扩散现象。它是由两个2维的 Taylor 映射用一个小参数b耦合在一起的一族4维映射，这样的映射等价于在不具任何对称性的星系引力场中恒星的运动。结果表明，在这样一个系统中，要么存在两个孤立积分(见图5)，要么没有孤立积分（除了通常的能量

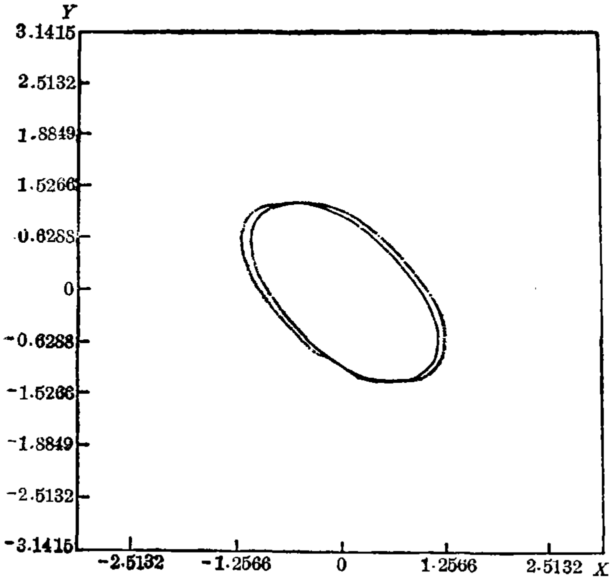

图 5

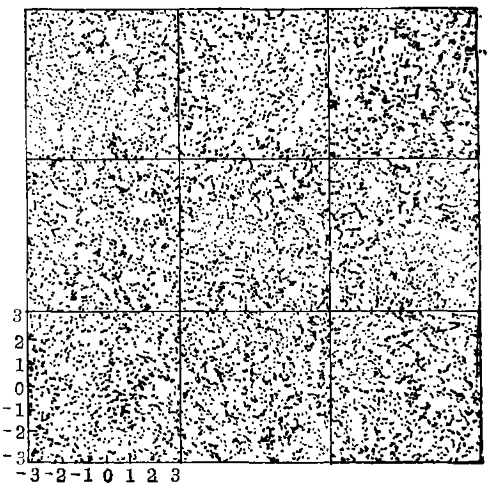

图 7

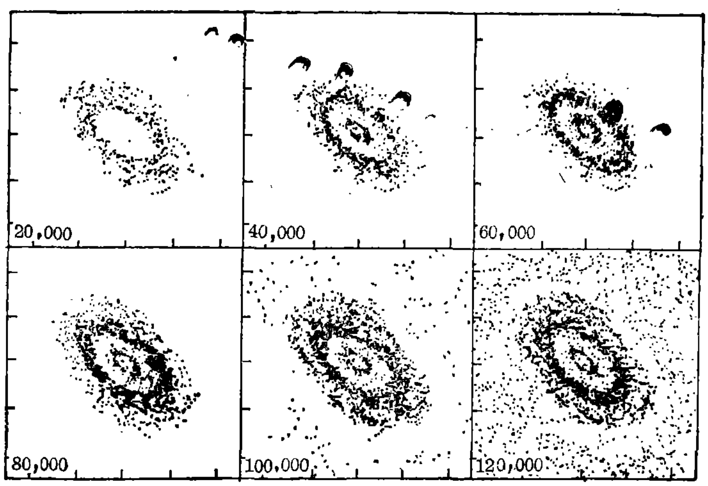

图 6

积分外)(见图 6)，但并没有发现所期望的 Arnold 扩散。另外，Froeschlé 还和我合作研究了推广的 Taylor 映射，得到此映射 Kolmogorov 熵的近似分析表达式，它与数值结果符合得很好[12]。

Hamilton 系统总是偶次维的，利用能量积分和 Poincaré 截面可将其解构成的映射，简化为低 2 维的保测度映射，因此与其对应的为偶次维的保测度映射可以利用 KAM 理论，这可能是研究保守动力系统总是讨论偶次维的原因，而对奇次维的保测度映射，则还没有人研究过。根据 Hénon 的建议，我开始了这方面的研究工作。考虑在不动点邻域内的线性化映射，对奇次维保测度映射而言，至少有一特征值为实的，又由于所有特征值的乘积为 1，因此，一般总存在其模大于 1 的特征值。这样，在线性近似下，不动点一般为不稳定的。我们设想，在整个定义区域，映射为随机的。首先我们研究了 3 维环面上的一个保测度映射族[13]

$$T_1:\ \begin{cases} x_{i+1}=x_i+z_i, \\ y_{i+1}=y_i+x_{i+1}, \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \\ z_{i+1}=z_i+A\sin y_{i+1}, \end{cases} \tag{5}$$

其中 A 为参数，我们研究了三个不同的 A 值的映射，这些映射的线性部分特征值 $\lambda_i (i=1,2,3)$ 为如下三种不同情形：

(1) $A=-7.0$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 皆为实的；$|\lambda_1|>1$，$|\lambda_2|>1$，$|\lambda_3|<1$；

(2) $A=-1.0$，λ_1 为实的，λ_2,λ_3 为复的，$|\lambda_1|<1$，$|\lambda_2|=|\lambda_3|>1$；

(3) $A=0.1$，λ_1 为实的，λ_2,λ_3 为复的，$|\lambda_1|>1$，$|\lambda_2|=|\lambda_3|<1$。

不论哪一种情形，映射 T_1 不存在任何不变流形，整个区域为混沌的(见图 7)。我们又研究了一族比较特殊的保测度映射[13]

$$T_2:\ \begin{cases} x_{i+1}=x_i+y_i+B\sin z_i, \\ y_{i+1}=y_i+A\sin x_{i+1}, \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \\ z_{i+1}=z_i+B\sin y_{i+1}, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $A=-1.5$，B 为小参数。这是 2 维 Taylor 映射加上小摄动项后，扩张成的一族 3 维环

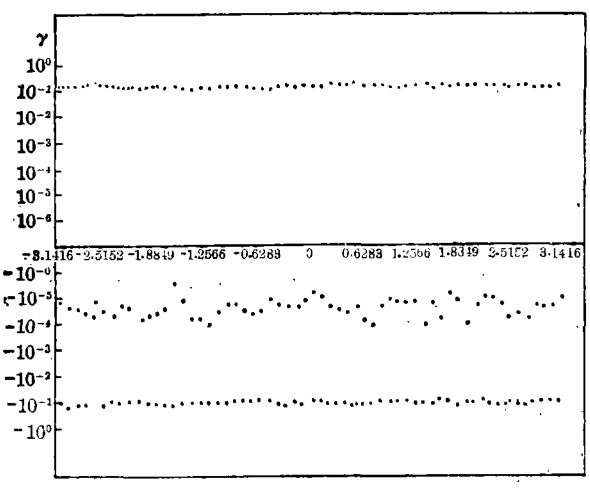

图 8

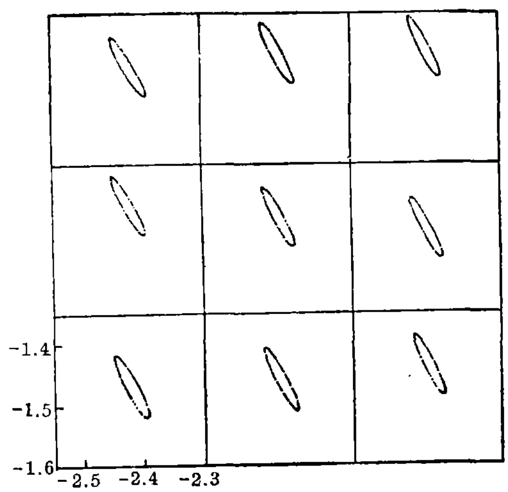

图 9

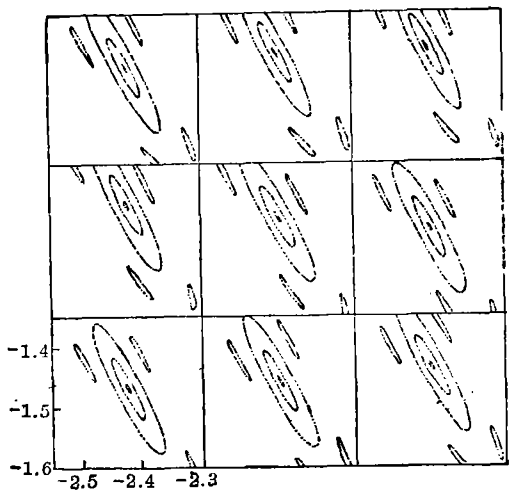

图 10

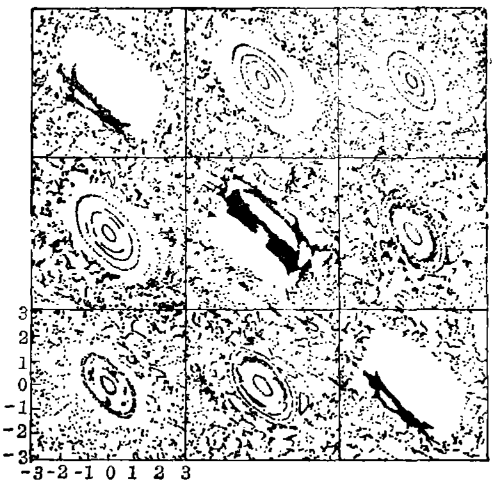

图 11

面上的保测度映射。我们知道，当$A=-1.5$时，Taylor 映射不但具有混沌区，而且还具有不小的有序区，选择这样的一族映射，主要是想探索当 Taylor 映射进行上面这样的受摄扩张后，各种区域的变化和不变流形的存在性。当沿着y轴进行 LCN's 探索时，发现了一个特殊的点$p=(0.1,-2.5,0.0)$，这一点对应的三个 LCN's 值皆为零(见图 8)，根据 LCN's 的值与映射有序区之间的关系，此点应处在映射的不变流形上，用“切片”(slice-cutting) 法证实了这一点，即点p的确处在不变“管子”上(见图 9)，在此不变“管子”周围，也存在“无穷嵌套的自相似的几何结构”(见图10)。为什么在不动点(0,0,0)的邻域中出现远离原点的缓慢扩散(见图11)，而在远离x轴的地方，在原来 Taylor 映射的不变岛屿处，却出现了映射T_2的不变“岛管”？这可能与映射中z_n的变化方式有关，因为若z_n快速变化且均匀地充满z轴时，则根据平均值原理，我们可以近似地从理论上说明上述结果。为了证实这一点，我们在映射T_2的z坐标中加上一个控制小参数D，即研究如下的一个映射族[16]

$$T_3:\quad \begin{cases} x_{i+1}=x_i+y_i+B\sin z_i, \\ y_{i+1}=y_i+A\sin x_{i+1}, \qquad \pmod{2\pi} \\ z_{i+1}=z_i+C\sin y_{i+1}+D, \end{cases} \tag{7}$$

其中$A=-1.5,B,C,D$为小参数，结果表明上述的猜想是正确的，并得到不变流形存在的判别式

$$D>BC,\quad \frac{2\pi}{D}\text{ 为无理数。}$$

此外，我们还研究了类似于二次保面积映射的 3 维扩张[14]，所得结果与二次保面积映射非常相似。对这一种特殊类型的 3 维保测度映射，得到如下的结论：

(1)在不动点邻域内，一般不存在不变流形；

(2)当不变曲线(1维不变流形)存在时，一般在其邻域内存在不变“管子”(2维不变流形)。

这些结论只是数值上的结果和理论上用平均法进行近似的说明，正如Arnold 所指出的，平均值原理既不是一个定理、公理，也不是一个定义，而是一个物理上的近似。因此，严格的数学证明，是一个尚待解决的问题。

在保守动力系统的数值研究方面，Magnenat, Martinet, Jefferys, Scholl, Gonczi等也做了不少工作。南京大学易照华、黄天衣等把动力系统的一些方法和结果应用到天体力学问题上，也得到了一些结果[17],[18]。

2．耗散系统　耗散系统是与保守系统性质完全不同的动力系统。在保守系统中，存在相空间中测度不变的流，而耗散系统则表现为相空间中体积的不断收缩，因此耗散系统中出现各种形式的吸引子，目前最使人感兴趣的、研究得最多的是奇异吸引子，这种现象最初是由Lorenz 在1963年研究简化的流体对流模型时发现的，1964年Hénon 用一个 2 维的映射

$$\begin{cases} x_{i+1}=y_i+1-ax_i^2, \quad a=1.4, \quad b=0.3 \\ y_{i+1}=bx_i \end{cases} \tag{8}$$

来显示Lorenz 系统中出现的奇异引吸子[19]。由于 2 维映射远比 Lorenz 研究的微分方程组简单，因此这个映射吸引了不少数学家、物理学家 和天文学家们的兴趣，人们称之为 Hénon 映射。图12显示了 Hénon 映射中出现的奇异吸引子，图13为图12中小方框部分的放大，从这两个图可以看出，奇异吸引子为 1 维流形乘上一个 Cantor 集。对耗散系统的研究，物理学家的兴趣远远大于天文学家，在国内，最近几年也已引起广泛的兴趣和重视。在耗散系统的研究中，西班牙天体力学家 Simò 的工作也是相当出色的[21]。我们根据对 3 维保测度映射的研究结果，将Hénon 映射类似地扩张到 3 维空间，得到原映射与扩张映射的吸引子之间的关系，它非常类似于保测度映射相应的结果，但耗散系统中的各种吸引子，似乎比保守系统中的不变流形在受摄扩张后更容易受到破坏[22]。

3．动力系统的研究与天体力学今后发展的关系　天体力学与统计力学长期以来处于对立的地位。由于天体力学为确定论的典型代表，因此，天体力学家总是喜欢用确定论的一套方法来研究天体力学问题，对统计力学的方法，既不了解，也不想去了解，总有点认为统计力学是不得已而为之。但是最近一些年来，这种情况有所改变，这主要是天体力学家在他们自己的研究工作中，越来越多地发现，在天体力学这一典型的确定论范畴中的学科，也存在着内在的随机性。比如 KAM 理论的出现，使天体力学家非常高兴，因为把 KAM 理论应用到天体力学上来，的确使天体力学取得

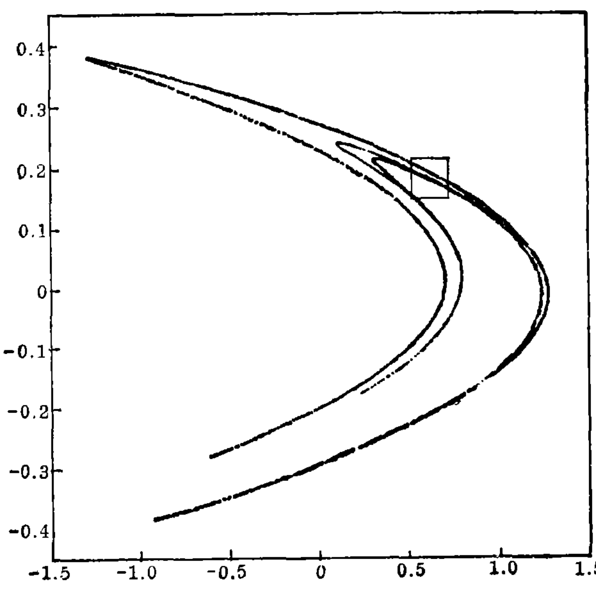

图　12

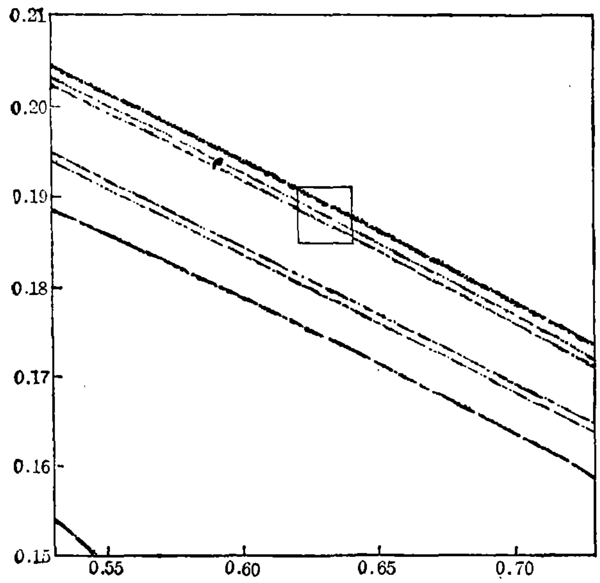

图 13

了一些重要的进展，解决了长期以来没有得到解决的圆型平面限制性三体问题中秤动点稳定性问题。但由于当自由度的数目 $n\geqslant 3$ 时，n维不变环面并不能把等能面分割成几个部分，因而不能用来解决稳定性问题，迷走轨道可以缓慢地扩散到整个等能面上，即产生所谓的 Arnold 扩散。另外，由于一些随机因素的存在，也可能使不变环面被破坏，从而出现混沌现象。1981年在意大利召开的NATO 天体力学会议上，Szebehely 提出了这样一个问题："天体力学是确定论的吗？"他列举了很多理由，比如一些未知因素的存在，初始条件只能近似给出等，认为天体力学也不是确定论的，他认为天体力学今后的发展，将来自接受非确定论的性态和处理目前尚未解决的问题的新拓扑统计方法的发展。这些都与动力系统的研究密切相关，看来，在天体力学与统计力学之间的鸿沟上出现了一些桥梁，动力系统的研究可能就是其中之一。

参 考 文 献

[1] Seigel, C. L. and Moser, J. K., Lectures on Celestial Mechanics, 151, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1971).

[2] Szebehely, V., Theory of Orbits, 411, Academic Press, New York and London, (1967).

[3] Froeschlé, C. and Scholl, H., Asteroids, Comets, Meteors, 115, ed by C. L. Lagerkvist and H. Rickman, (1984).

[4] Chirikov, B. V., *Phys Rep.*, **52** (1979), 263.

[5] Helleman, R. H. G., Fundamental Problems in Statistical Mechanics, 166, ed by E. G. D. Cohen, North-Holland, (1980).

[6] Hénon, M. and Heiles, C., *A. J.*, 69 (1964), 73.

[7] Benettin, G., Froeschlé, C. and Scheidecker, J. P., *Phys. Rev.*, A19 (1979), 2454.

[8] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A. and Strelcyn, J. M., *Meccanica*, March 9, 1980.

[9] Contopoulos, G., Dynamical Structure and Evolution of Stellar Systems, 83, ed by L. Martinet and M. Mayor, (1973).

[10] Froeschlé, C., *Astrophys. Space Sci.*, **14** (1971), 110.

[11] 孙义燧, Froeschlé, C., 天文学报, **22** (1981), 159.

[12] 孙义燧, Froeschlé, C., 中国科学(A), (1982), No.4, 357.

[13] Sun, Y. S., *Celestial Mechanics*, **30** (1983), 7.

[14] 孙义燧, 中国科学(A), (1983), No.10, 922.

[15] 孙义燧, 天文学报, **24** (1983), 128.

[16] Sun, Y. S., *Celestial Mechanics*, **33** (1984), 111.

[17] Jefferys, W. H. and Yi, Z. H., *Celestial Mechanics*, **30** (1983), 85.

[18] Huang, T. Y. and Innanen, K. A., *A. J.*, **88** (1983), 1064.
[19] Hénon, M., *Commun. Math. Phys.*, **50** (1976), 69.
[20] 郝柏林，物理学进展，(1983), No.3, 329.
[21] Simò, C., *J. Stat. Phys.*, **21** (1979), 465.
[22] Sun, Y. S., *Celestial Mechanics*, **37** (1985), 171.
[23] Szebehely, V., Applications of Modern Dynamics to Celestial Mechanics and Astrodynamics, 321, ed by V. Szebehely, (1981).

（责任编辑 刘金铭）

Numerical Studies of Dynamical System

Sun Yisui
(*Department of Astronomy, Nanjing University*)

Abstract

This paper reviews the contribution of astronomers in the numerical studies of dynamical systems and the methods used in the research. Attention is focused on the excellent work of M. Hénon, the results of which not only have often been cited by the astronomers, but also attracted great attention of the mathematicians and physicists. The mapping studied by Hénon is called Hénon mapping.